ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 1999

MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE ÉPREUVE
FILIÈRE PSI
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'emploi de la calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition du concours E. N. T. P. E..
Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES I - PSI.
L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PSI, comporte 4 pages.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Introduction

Une serrure de sécurité possède n boutons numérotés de 1 à n ($n \geq 1$). Une "combinaison" consiste à pousser dans un certain ordre tous les boutons. Chaque bouton n'est poussé qu'une seule fois mais il est possible de pousser simultanément plusieurs boutons.

La modélisation est effectuée de la manière suivante : pour une valeur donnée de l'entier n, soit A_n l'ensemble des entiers de 1 à n :

$$A_n = \{1, 2,\dots, n\}.$$

Par définition une n-combinaison est une suite ordonnée $(P_1, P_2,\dots,P_j)$ de j parties $P_1, P_2,\dots, P_j$ de l'ensemble A_n ($1 \leq j \leq n$) ; ces parties P_i, $1 \leq i \leq j$, de A_n sont deux à deux disjointes et différentes de la partie vide ; leur réunion est égale à A_n.

Soit a_n le réel égal au nombre de n-combinaisons.

Exemples :

n = 1 : une seule 1-combinaison : $(\{1\})$; $a_1 = 1$.

n = 2 : il y a trois 2-combinaisons :

$$(\{1\}, \{2\}) \;;\; (\{2\}, \{1\}) \;,\; (\{1, 2\}) .$$

La première 2-combinaison consiste à appuyer d'abord sur le bouton 1 puis sur le bouton 2, la deuxième à appuyer d'abord sur le 2 puis sur le 1, la troisième à appuyer simultanément sur les boutons 1 et 2. $a_2=3$.

Première partie.

Le but de cette partie est de donner quelques exemples de n-combinaisons et d'établir une relation de récurrence vérifiée par les réels a_n, $n \geq 1$.

I-1°) <u>Premiers exemples</u> :

a. Pour une valeur de l'entier n donné, quel est le nombre de n-combinaisons telles que les boutons soient poussés l'un après l'autre ? (les parties P_i, $1 \leq i \leq n$, sont toutes des singletons).

b. Déterminer, lorsque l'entier n est égal à 3, en explicitant chacune des suites possibles, le nombre a_3 des 3-combinaisons. Les singletons $\{1\}$, $\{2\}$ et $\{3\}$ peuvent être désignés brièvement par 1, 2 et 3. Par exemple : $(1, 3, 2)$ désigne la 3-combinaison dans laquelle les boutons sont poussés successivement dans l'ordre 1, 3, 2 ; $(\{1, 3\}, 2)$ est la suite dans laquelle les deux boutons 1 et 3 sont poussés simultanément avant que le bouton 2 ne soit enfoncé.

I-2°) <u>Relations de récurrence</u> :

L'entier n est supérieur ou égal à 1. Soit S une n-combinaison quelconque ; S est une suite ordonnée $(P_1, P_2,\dots, P_j)$ de j parties $P_1, P_2,\dots, P_j$ de l'ensemble A_n, deux à deux disjointes, non vides, dont la réunion est égale à A_n $(1 \leq j \leq n)$.

a. Combien y a-t-il de choix possibles pour la partie P_1 lorsque le nombre d'éléments de P_1 est k ($\mathrm{card}P_1 = k$) ?

b. Soit k un entier strictement inférieur à n ($k < n$) ; pour une partie P_1 fixée possédant k éléments ($\mathrm{card}P_1 = k$), combien y a-t-il de n-combinaisons S ? Exprimer le résultat à l'aide du réel a_p, pour une valeur convenable de l'entier p.

c. Le but de cette question est d'établir une relation de récurrence vérifiée par les termes de la suite $(a_p)_{p\geq 1}$. Exprimer d'abord le réel a_n, en fonction des réels a_p, $1 \leq p \leq n-1$. Puis avec la convention $a_0 = 1$, exprimer le réel a_n pour $n \geq 1$, en fonction des réels a_p, $0 \leq p \leq n-1$.
Retrouver les valeurs obtenues ci-dessus pour a_2 et a_3.

d. Soit $(b_p)_{p\geq 0}$ la suite des réels définis par la relation : pour tout entier naturel n, $b_n = \dfrac{a_n}{n!}$. Démontrer que ces réels $b_p, p\geq 0$, vérifient la relation de récurrence :

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_{n-k}}{k!}$$

TOURNEZ LA PAGE S'IL VOUS PLAÎT

I-3°) Majoration des réels b_n, $n \geq 0$:

Démontrer, pour tout entier naturel n, la relation suivante : $b_n \leq \dfrac{1}{(\ln 2)^n}$.

I-4°) Minoration des réels b_n, $n \geq 1$:

a. Établir, en appliquant par exemple à une fonction convenable la formule de Taylor, la relation ci-dessous, vraie pour tout entier n, n≥1 :

$$e^{\ln 2} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\ln 2)^k}{k!} + 2\frac{(\ln 2)^n}{n!}.$$

b. En déduire pour tout entier n, n≥1, la minoration : $b_n \geq \dfrac{1}{2\,(\ln 2)^n}$.

Deuxième partie

L'objet de cette partie est l'étude de la série entière de terme général $b_n\, x^n$, $n \geq 0$. Cette série est appelée série génératrice de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$. Lorsque le rayon de convergence de la série entière de terme général $b_n\, x^n$, $n \geq 0$, est strictement positif, soit f la somme de la série ; cette fonction est définie dans l'intervalle de convergence par la relation suivante :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n\, x^n}{n!}.$$

II-1°) Existence et expression de la fonction f :

a. Quel est le rayon de convergence R de la série entière de terme général $b_n\, x^n$, $n \geq 0$?

b. Soit $c_n\, x^n$, $n \geq 0$, le terme général de la série, produit de Cauchy de la série exponentielle et de la série de terme général $b_n\, x^n$, $n \geq 0$. Déterminer l'expression de c_n suivant que l'entier n est nul ou supérieur ou égal à 1.

En déduire, pour tout réel x de l'intervalle de convergence $]-R, R[$, l'expression de f(x) à l'aide de fonctions élémentaires.

II-2°) Une expression du coefficient a_n :

a. Donner, pour tout entier naturel n, l'expression du coefficient a_n, au moyen de la valeur d'une dérivée de la fonction f en 0.

b. Soit $(u_k)_{k=0,1,2,\ldots}$ la suite de fonctions définies par la relation : $u_k(x) = \dfrac{e^{k\,x}}{2^{k+1}}$.

Préciser le plus grand ensemble ouvert J dans lequel la série de fonctions de terme général u_k est convergente. Dans quels intervalles fermés la convergence de la série de fonctions u_k, $k=0,1,2,\ldots$, est-elle uniforme ?

Préciser le plus grand intervalle ouvert dans lequel la fonction f et la somme de la série sont égales : $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$.

c. Déduire des deux questions précédentes que le coefficient a_n est égal à la somme d'une série.

Troisième partie

Le but de cette partie est de déterminer un infiniment grand équivalent au réel a_n lorsque l'entier n croît indéfiniment. Soit, pour un entier n naturel donné, g_n la fonction définie par la relation : $g_n(x) = \dfrac{x^n}{2^x}$.

III-1°) <u>Intégrabilité de la fonction</u> g_n :

Démontrer que la fonction g_n est intégrable sur la demi-droite $R^+ = [0, •[$. Calculer son intégrale I_n : $I_n = \int_{R^+} g_n(x)\,dx$.

III-2°) <u>Équivalent de</u> a_n <u>à l'infini</u> :

Dans les alinéas a, b, c et d l'entier n est fixé et supérieur ou égal à 1.

a. Étudier les variations de la fonction g_n sur la demi-droite R^+ et tracer son graphe.

Soient x_n et M_n l'abscisse et l'ordonnée du maximum de la fonction g_n sur R^+, j le plus grand entier inférieur ou égal à x_n et r leur différence : $j \le x_n < j + 1$; $x_n = j + r$.

b. Encadrer, pour tout entier k différent de j, l'intégrale $\int_k^{k+1} g_n(x)\,dx$. En déduire des encadrements des deux intégrales A_j et B_j définies ci-dessous :

$$A_j = \int_0^j g_n(x)\,dx\ ,\ B_j = \int_{j+1}^{\infty} g_n(x)\,dx\ .$$

c. Démontrer l'encadrement : $r\ g_n(j) + (1–r)\ g_n(j+1) \le \int_j^{j+1} g_n(x)\,dx$ • M_n .

d. En déduire un encadrement de a_n à l'aide des deux réels $I_n – M_n$ et $I_n + M_n$.

e. En déduire, grâce par exemple à la formule de Stirling, un infiniment grand équivalent à a_n lorsque l'entier n croît vers l'infini. Rappel : $n! \sim n^n e^{–n} \sqrt{2\pi n}$.

FIN DU PROBLÈME

FIN DE L'ÉPREUVE

TOURNEZ LA PAGE S'IL VOUS PLAÎT