ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 1999

MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME ÉPREUVE
FILIÈRE PC
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'emploi de la calculette est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES II - PC.
L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PC, comporte 4 pages.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Notations

Dans tout le problème f est une fonction réelle définie sur la droite réelle R, de classe $C^{\bullet}$ sur R, développable en série entière dans l'intervalle ouvert I =]–R, R[où R est un réel strictement positif (R > 0) : il existe donc une série entière de terme général $a_n x^n$, n N, telle que, pour tout réel x de cet intervalle f(x) soit la somme de la série entière :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

Dans tout le problème α est un réel strictement positif ($\alpha > 0$) ; soit $E_{\alpha,f}$ l'équation différentielle suivante :

$E_{\alpha,f}$ $$x y' + \alpha y = f(x) .$$

y est une fonction inconnue réelle et dérivable.

Première partie

I-1°) <u>Fonction</u> $T_\alpha(f)$:

a. Démontrer que, pour tout réel a strictement positif, la fonction $x \text{-} x^{\alpha-1}.f(x)$ est intégrable sur l'intervalle semi-ouvert]0, a].

Soit $T_\alpha(f)$ la fonction, définie sur la demi-droite ouverte]0, •[par la relation :

pour tout réel x strictement positif, $T_\alpha(f)(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}\displaystyle\int_0^x u^{\alpha-1} f(u)\, du$.

b. Déterminer successivement la fonction $T_\alpha(f)$ lorsque la fonction f est la fonction constante ”, puis la fonction puissance x-x^n (n est un entier strictement positif).

c. Démontrer que la fonction $T_\alpha(f)$ admet une limite lorsque x tend vers 0 ; la déterminer.

I-2°) <u>Résolution de l'équation différentielle</u> $E_{\alpha,f}$ <u>sur les demi-droites]0, •[et]–•, 0[</u> :

a. Résoudre l'équation différentielle $E_{\alpha,f}$ sur la demi-droite]0, •[; exprimer la solution à l'aide de la fonction $T_\alpha(f)$. Démontrer qu'il existe, sur cet intervalle, une seule solution de l'équation différentielle $E_{\alpha,f}$ qui admet une limite finie lorsque le réel x tend vers 0 ; déterminer cette solution.

b. Résoudre l'équation différentielle $E_{\alpha,f}$ sur la demi-droite]–•, 0[; exprimer la solution à l'aide de la fonction, définie sur]–•, 0[x-$\displaystyle\int_0^{-x} u^{\alpha-1} f(-u)\, du$.

Démontrer qu'il existe, sur cet intervalle, une seule solution de l'équation différentielle $E_{\alpha,f}$ qui admet une limite finie lorsque le réel x tend vers 0 ; déterminer cette solution.

I-3°) <u>Résolution de l'équation différentielle</u> $E_{\alpha,f}$ <u>sur l'intervalle I puis sur R</u> :

a. Démontrer que l'équation différentielle $E_{\alpha,f}$ admet sur l'intervalle I une solution S égale à la somme d'une série entière. Poser :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n \ .$$

Déterminer les coefficients b_n, n N, à l'aide des a_n, n N ; donner un minorant du rayon de convergence R' de la série entière obtenue.

Exprimer, suivant le signe de x, l'expression de S(x) à l'aide des intégrales du type $T_\alpha(f)$ définies aux questions I-1° et I-2° ; en déduire S(0).

b. Démontrer qu'il existe une seule solution de l'équation différentielle $E_{\alpha,f}$ qui est définie et continue sur tout R.

I-4°) <u>Fonction</u> $T_\alpha(f)$:

a. Démontrer que, si la fonction f est monotone croissante (respectivement décroissante) alors la fonction $T_\alpha(f)$ est monotone croissante (respectivement décroissante).

b. Démontrer que, si la fonction f admet une limite ”, lorsque x tend vers l'infini, la fonction $T_\alpha(f)$ admet aussi une limite L qui sera précisée.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues sur la demi-droite fermée [0, •[. Étant donnée une fonction h appartenant à l'espace vectoriel E, soit $L_\alpha(h)$ la fonction définie sur la demi-droite [0, •[par la relation :

$$L_\alpha(h)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^\alpha}\displaystyle\int_0^x u^{\alpha-1}\, h(u)\, du, \text{ si } x > 0, \\ \dfrac{h(0)}{\alpha}, \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

I-5°) <u>Endomorphisme</u> L_α :

a. Démontrer que l'application L_α : h-$L_\alpha(h)$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E.

b. Étant donnés deux réels α et β strictement positifs, comparer les deux fonctions suivantes : $(\alpha - \beta)\, L_\alpha o L_\beta$ et $L_\beta - L_\alpha$.

$L_\alpha o L_\beta$ désigne l'application composée de L_α et L_β : h-$L_\alpha(L_\beta(h))$.

Indication : considérer, pour une fonction quelconque h de E, la fonction H définie, sur la demi-droite ouverte]0, •[, par la relation :

$$H(x) = x^\alpha \left\{ L_\alpha(L_\beta(h))(x) - \frac{1}{\alpha - \beta}\,(L_\beta - L_\alpha)(h)(x) \right\}.$$

Établir que la fonction H est constante et conclure.

En déduire, pour α et β différents l'un de l'autre, que les deux applications L_α et L_β commutent ($L_\alpha o L_\beta = L_\beta o L_\alpha$).

Seconde partie

Dans cette partie la fonction f est la fonction réelle définie sur R par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2} \quad .$$

II-1°) <u>Étude de</u> $T_\alpha(f)$:

a. Démontrer que la fonction f a bien les propriétés supposées dans le préambule du problème.

b. Calculer les fonctions $T_1(f)$ et $T_2(f)$.

c. Démontrer que, si le réel α est strictement supérieur à 2, ($\alpha > 2$), la fonction $T_\alpha(f)$ vérifie l'inégalité :

$$\text{pour tout réel } x \text{ strictement positif : } T_\alpha(f)(x) \le \frac{1}{(\alpha - 2)x^2} \quad .$$

d. Démontrer que, si le réel α est strictement inférieur à 2, ($0 < \alpha < 2$), il existe une constante A_α telle que la fonction $T_\alpha(f)$ vérifie l'inégalité :

$$\text{pour tout réel } x \text{ strictement positif : } T_\alpha(f)(x) \leq \frac{A_\alpha}{x^\alpha}\ .$$

e. En déduire, selon la valeur du réel α, la limite de la fonction $T_\alpha(f)$ lorsque le réel x tend vers l'infini. Comparer avec les résultats obtenus à la question I-4°.b.

II-2°) Propriétés de la fonction $T_\alpha(f)$:

a. Établir une relation simple entre les fonctions $T_\alpha(f)$ et $T_{\alpha+2}(f)$. En déduire la limite, lorsque le réel x croît vers l'infini, de l'expression $x^2.T_\alpha(f)(x)$.

b. Calculer, pour tout réel a strictement positif, l'intégrale I définie par la relation :

$$I = \int_0^a \frac{dt}{1+t^3}\ .$$

c. Dans cette question le réel α est égal à 2/3 ($\alpha = \frac{2}{3}$) ; déterminer la valeur prise par cette fonction $T_{2/3}(f)$ pour $x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Indication : effectuer le changement de variable $u = t^{3/2}$ dans l'intégrale .

II- 3°) Calcul de sommes de séries :

a. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de terme général, $\frac{(-1)^n\ x^{2n}}{2n+\alpha}$ n=0, 1,…. Soit S la somme de cette série définie dans l'intervalle ouvert $J =]-R, R[$: $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ x^{2n}}{2n+\alpha}$. Démontrer que la fonction, définie dans J, x-S(x) est solution de l'équation différentielle $E_{\alpha,f}$. En déduire une expression de cette somme S(x) lorsque le réel x est positif et appartient à J.

b. Quelle est la somme Σ de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{8^n\ (3n+1)}$:

$$\Sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8^n\ (3n+1)}\ .$$

FIN DU PROBLÈME

FIN DE L'ÉPREUVE