A 2005 Math PC 2

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES. ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE, DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS, DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE. ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2005

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
DEUXIÈME ÉPREUVE
Filière PC

Durée de l'épreuve : 3 heures
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle International, ENSTIM, ENSAE (Statistique), INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 2 - Filière PC.
Cet énoncé comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Racine carrée d'endomorphisme

Pour toute fonction f continue intégrable sur $\mathbb{R}$, on considère $\widehat{f}$, dite *transformée de Fourier de* f, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\,\mathrm{d}x.$$

D'après le théorème de convergence dominée, on sait que $\widehat{f}$ est continue et on *admet* que si, de plus, $\widehat{f}$ est intégrable alors l'égalité suivante est vérifiée pour tout réel x :

$$2\pi f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y)e^{ixy}\,\mathrm{d}y.$$

On note $\mathcal{S}$, l'ensemble, appelé espace de Schwartz, des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et telles que pour tous les entiers $j \geq 0$ et $k \geq 0$, la fonction $f^{(j)}$ soit négligeable devant la fonction $(y \mapsto (1+|y|^k)^{-1})$ quand $|y|$ tend vers l'infini : pour tout j et tout k entiers,

$$|f^{(j)}(y)|(1+|y|^k) \text{ tend vers 0 quand } |y| \text{ tend vers l'infini.}$$

On admet que la transformation de Fourier est une bijection de $\mathcal{S}$ dans lui-même.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et E un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions définies et indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes. On appelle dérivation dans E l'application d qui à tout f de E associe sa dérivée f'. On suppose que d est un endomorphisme de l'espace vectoriel E. L'objet du problème est de chercher s'il existe un endomorphisme δ de E tel que $\delta \circ \delta = d$: on dira alors que δ est une racine carrée de d.

I. Préliminaires

On suppose, dans cette partie seulement, que δ existe.

1) Quelle relation d'inclusion existe-t-il entre le noyau de d et le noyau de δ ?
2) Quelle relation d'inclusion existe-t-il entre l'image de d et l'image de δ ?
3) Montrer que δ est un automorphisme de E si et seulement si d est un automorphisme de E.
4) Montrer que tout sous-espace propre de d est stable par δ.

II. Dimension finie

On désigne par E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, dont une base est $(\cos\ x,\ \sin x)$.

5) Montrer que la dérivation dans E est un automorphisme d de E.

6) Écrire la matrice D de d dans la base $(\cos x, \sin x)$. Montrer que D est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

7) Qu'est-ce que cela implique pour δ ?

8) Pour diagonaliser D, prenons la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}.$$

Quelles sont les valeurs possibles de la matrice Δ de δ dans cette base ?

9) Déterminer, par leur matrice dans la base $(\cos x, \sin x)$, tous les automorphismes du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E dont le carré est égal à d.

III. Espace de Schwartz

Désormais, on considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{S}$ défini dans l'introduction. Dans ce qui suit, on considère un élément donné f de E. Pour tout nombre réel y, on note

$$r(y) = \begin{cases} \sqrt{y} & \text{si} \quad y \geq 0 \\ i\sqrt{-y} & \text{si} \quad y < 0. \end{cases}$$

On définit la fonction $\delta(f)$ par :

$$\delta(f)(x) = \frac{1+i}{2\pi\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} r(y)\widehat{f}(y)e^{ixy}\ \mathrm{d}y.$$

10) À quelle condition sur le réel λ, la fonction φ_λ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi_\lambda(x) = \exp(-\lambda.x^2),$$

appartient-elle à E ?

11) Soit j un entier naturel. Donner l'expression de la transformée de Fourier, $\widehat{f^{(j)}}$, de la dérivée j-ième de f en fonction de la transformée de Fourier de f.

12) Montrer que $\delta(f)$ est définie et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

13) Désormais, on suppose de plus que f est nulle en-dehors d'un segment $[-A,A]$, où A est un réel strictement positif, et que f est d'intégrale nulle sur $\mathbb{R}$, autrement dit telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
Montrer que la transformée de Fourier de f est développable en série entière au voisinage de l'origine, et donner une expression des coefficients $(a_n, n \geq 0)$ tels que

$$\widehat{f}(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n.$$

14) Montrer qu'il existe une fonction u définie et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel y, on ait $\widehat{f}(y) = y\,u(y)$.

15) Démontrer que pour tout réel non nul x, l'identité suivante est satisfaite :

$$\int_0^{+\infty} y^{3/2} u(y) e^{ixy}\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{3u(y)}{4\sqrt{y}} + 3\sqrt{y}u'(y) + y^{3/2}u''(y) \right) e^{ixy}\,\mathrm{d}y. \quad (1)$$

16) Montrer que $\delta(f)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

17) Pour $f \in \mathcal{S}$, on note $\widetilde{f}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $\widetilde{f}(x) = f(-x)$.
Comparer $\widehat{\widehat{f}}$ et $\widetilde{\widetilde{f}}$.

18) Montrer que $r\widehat{\delta(f)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

19) Montrer que $\delta^2 = d$.

20) Montrer que si f n'est pas la fonction nulle, il n'existe aucun segment en dehors duquel $\delta(f)$ est nulle.

FIN DU PROBLÈME