

A 98 PHYS. I

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIERE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 1998

PREMIÈRE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Filière MP

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Sujet mis à disposition du concours ENTPE suite à l'arrêté du 09 décembre 1997

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

PHYSIQUE I - MP

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP, comporte 7 pages.

- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
- Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être utilisé pour les questions ultérieures, même s'il n'a pas été démontré.
- Il ne faudra pas hésiter à formuler les commentaires (incluant des considérations numériques) qui vous sembleront pertinents, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

Notations : vecteur $\rightarrow \mathbf{A}$ (gras) ; vecteur unitaire $\rightarrow \hat{\mathbf{a}}$.

OSCILLATEURS

L'épreuve comprend deux problèmes indépendants entre eux, et que l'on pourra traiter dans l'ordre de son choix. Le premier problème étudie l'évolution du comportement d'un pendule pesant en fonction de son énergie E . Le second problème s'intéresse aux circuits à constantes réparties puis à un exemple d'auto-oscillations à partir du repos à l'aide d'une diode Tunnel.

I - Oscillateur unidimensionnel

I-1 Pendule non linéaire sans frottement

On considère le dispositif mécanique représenté à la fig. 1, constitué d'une barre mobile (B) de masse m et de longueur l , tournant sans frottement autour de l'axe Oy, fixe dans le référentiel galiléen $R = Oxyz$. On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$ et l'on donne le moment d'inert-

tie J_{Oy} de la barre par rapport à Oy : $J_{Oy} = \frac{1}{3} m l^2$.

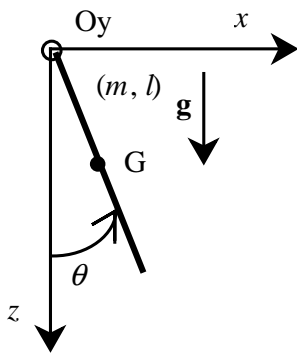


Fig. 1 : pendule pesant

□ 1 – Établir l'équation différentielle (E_1) du deuxième ordre vérifiée par $\theta(t)$.

□ 2 – On note E l'énergie mécanique du système, prise nulle à l'équilibre lorsque $\theta = 0$. Montrer que ce système est *conservatif* c'est-à-dire que l'énergie mécanique E se conserve.

□ 3 – On suppose que $E < E_{\text{crit}} = mgl$. Représenter, pour diverses valeurs de $E < E_{\text{crit}}$, l'allure des trajectoires possibles dans l'espace des phases $\left(\theta, \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}\right)$. Montrer que l'on obtient des *orbites fermées* dont on précisera le sens de parcours.

□ 4 – Dédurre de ces résultats que le point M_0 de coordonnées $(0, 0)$ dans l'espace des phases définit une position d'équilibre stable et montrer que, pour $0 < E < E_{\text{crit}}$, le mouvement est périodique de période $T(E) = \frac{T_0}{\pi} \int_0^{\theta_0(E)} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{E}{E_{\text{crit}}} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}$, où $E = E_{\text{crit}} \sin^2 \frac{\theta_0}{2}$ et $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Montrer que l'on obtient un oscillateur harmonique si $E \ll E_{\text{crit}}$.

□ 5 – On suppose dans cette question que $E > E_{\text{crit}} = mgl$. Représenter dans l'espace des phases $(\theta, \dot{\theta})$ les trajectoires possibles pour diverses valeurs de $E > E_{\text{crit}}$. Donner un exemple de conditions initiales conduisant à cette situation et préciser alors le sens de parcours de l'orbite obtenue dans l'espace des phases.

□ 6 – Comment reconnaît-on, dans l'espace des phases, les positions d'équilibre, stable ou instable ?

I-2 Pendule linéaire avec frottement fluide

On reprend le dispositif étudié en I-1), mais en tenant compte désormais d'un frottement fluide, caractérisé par son moment par rapport à Oy : $\Gamma_{\text{fluide}, Oy} = -f \frac{d\theta}{dt}$ ($f > 0$). Dans toute la partie I-2, on suppose que l'angle θ reste petit devant π .

□ 7 – Expliquer en quoi le terme $\Gamma_{\text{fluide}, Oy} = -f \frac{d\theta}{dt}$ caractérise effectivement un frottement. Citer d'autres situations physiques où l'on rencontre un frottement analogue.

□ 8 – Établir et commenter la nouvelle équation différentielle (E_2) du deuxième ordre vérifiée par $\theta(t)$.

□ 9 – Montrer que l'énergie $E(t)$ décroît à partir de l'énergie initiale $E(0)$ et représenter,

sans calcul, l'allure du *portrait de phase* en régimes amorti, critique et pseudo-périodique. Le portrait de phase est l'ensemble des trajectoires de phase. Ce diagramme est caractéristique de l'évolution du système représenté dans l'espace de phase.

□ 10 – On suppose dans la suite de cette partie I -2 que $\tau = \frac{m\ell^2}{3f} \gg T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Quelle est la signification physique de cette condition ?

□ 11 – Établir que l'énergie moyenne $E(t) = \int_t^{t+T_0} E(t') dt'$ diminue exponentiellement avec le temps : $E(t) = E(0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$.

□ 12 – Montrer que l'énergie perdue durant une pseudo période $T \approx T_0$ a une interprétation géométrique simple dans le portrait de phase. En déduire l'expression du **facteur de qualité** :

$$Q = 2\pi \frac{\text{Énergie moyenne}}{\text{Énergie perdue par cycle}} = 2\pi \frac{E(t)}{E(t) - E(t+T_0)} = \omega_0 \tau$$

Quelle signification physique donnez-vous au facteur de qualité en régime libre pseudo-périodique ? Dans quel autre contexte rencontre-t-on Q et quelle en est alors la signification ?

FIN DE CE PROBLÈME

II - Oscillations dans un système à constantes réparties.

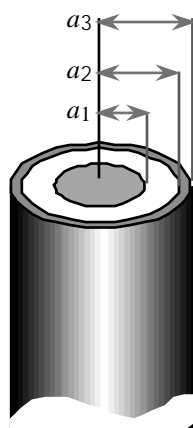


Fig. 3 : tronçon de câble

On considère un câble coaxial d'antenne de télévision constitué de la façon suivante (fig. 3) : les cylindres (C_i) , situé dans le domaine $0 \leq r \leq a_1$ et (C_e) , situé dans le domaine $a_2 \leq r \leq a_3$, sont tous deux en cuivre de conductivité $\gamma = 6 \times 10^7 \text{ S.m}^{-1}$. Le domaine $a_1 \leq r \leq a_2$ est constitué par un isolant parfait caractérisé par une permittivité diélectrique $\epsilon = 2,3 \epsilon_0$; cela signifie que tous les calculs relatifs à l'espace $a_1 \leq r \leq a_2$ seront d'abord faits dans l'hypothèse où cet espace est vide de matière et que l'on admettra la validité du résultat trouvé en substituant $2,3 \epsilon_0$ à ϵ_0 ($\epsilon_0 \approx 8,84 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$).

Pour fixer les idées, on considère un tronçon de câble de longueur $d = 50 \text{ m}$, ce qui permet (on l'admettra en tout cas) de négliger les effets de bord et plus précisément de considérer que les champs électrique et magnétique dans le domaine $0 \leq x \leq d$ peuvent être calculés comme si le câble était infini. Les dimensions transverses, quant à elles, sont $a_1 = 0,5 \text{ mm}$, $a_2 = 2,5 \text{ mm}$ et $a_3 = 3,5 \text{ mm}$.

On applique une d.d.p. $u(0, t)$ en $x = 0$ entre (C_i) et (C_e) , de pulsation ω validant les hypothèses (H_1) et (H_2) suivantes :

• (H₁) : l'approximation des régimes quasi-permanents est vérifiée localement entre x et $x + dx$.

• (H₂) : les courants n'ont de valeur significative que sur une épaisseur $\delta(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$ très faible devant $\inf(a_1, a_2, a_3)$, au voisinage de $r = a_1$ pour (C_i) et de $r = a_2$ pour (C_e).

On note alors respectivement $\sigma_1(x, t)$ et $\mathbf{j}_{s,1}(x, t) = j_{s,1}(x, t) \hat{\mathbf{x}}$ la densité superficielle de charges libres et la densité superficielle de courant en $r = a_1$; en $r = a_2$, ces grandeurs sont notées respectivement $\sigma_2(x, t)$ et $\mathbf{j}_{s,2}(x, t) = j_{s,2}(x, t) \hat{\mathbf{x}}$. On nomme $i(x, t)$ l'intensité du courant traversant une section droite de (C_i) à l'abscisse x et $u(x, t) = V(a_1, x, t) - V(a_2, x, t)$ la différence de potentiel entre (C_i) et (C_e). Enfin, on donne, en coordonnées cylindriques (notations standard) :

$$\begin{aligned} \text{rot}(\mathbf{A}) &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{\mathbf{z}} \\ \text{div}(\mathbf{A}) &= \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{aligned}$$

II-1 Modélisation du câble coaxial par constantes réparties.

□ 13 – Quels sont les critères de validité des hypothèses (H₁) et (H₂) ? Comment se traduit (H₁) dans les équations de Maxwell ? Sachant que $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$, calculer $\delta(\omega)$ pour une fréquence $f = 10 \text{ MHz}$. Quelles sont les conséquences pour le courant i ?

□ 14 – On suppose ici que l'espace $a_1 < r < a_2$ est vide et décrit par la permittivité diélectrique ϵ_0 . Les champs électrique $\mathbf{E}(M, t)$ et magnétique $\mathbf{B}(M, t)$ y ont respectivement la forme $\mathbf{E}(M, t) = E_r(r, x, t) \hat{\mathbf{r}}(M)$ et $\mathbf{B}(M, t) = B_\theta(r, x, t) \hat{\boldsymbol{\theta}}(M)$. Calculer dans ces conditions d'une part l'expression de $E_r(r, x, t)$ en fonction de $\sigma_1(x, t)$, a_1 , r et ϵ_0 , d'autre part celle de $B_\theta(r, x, t)$ en fonction de $j_{s,1}(x, t)$, a_1 , r et μ_0 .

□ 15 – Considérant l'énergie magnétique confinée dans le domaine intra armatures $[a_1, a_2]$, $[x, x + dx]$, montrer que l'on peut définir une *inductance linéique* $L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{a_2}{a_1}$. Établir de la même manière l'expression du coefficient de *capacité linéique* $C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{a_2}{a_1}}$.

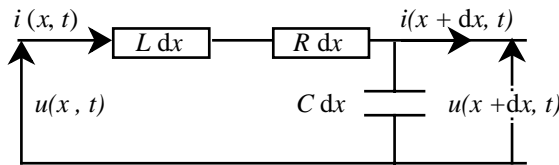


Fig. 4 : portion de circuit à constantes réparties, entre x et $x + dx$

□ 16 – Le caractère transversal des champs $\mathbf{E}(M, t)$ et $\mathbf{B}(M, t)$ supposé à la question 14 vous semblent-il justifié (on peut mettre en rapport le câble coaxial objet de ce problème et le guide d'ondes rectangulaire) ?

□ 17 – On note $R_1 dx$ [et respectivement $R_2 dx$] la résistance mise en jeu dans le tronçon $[x, x + dx]$ sur (C_i) [et respec-

tivement (C_e), au voisinage de $r = a_1$ [et respectivement $r = a_2$]. Montrer que $u(x, t)$ et $i(x, t)$ sont reliés entre eux par le schéma électrocinétique, dit à *constantes réparties*, de la fig. 4, où l'on exprimera R en fonction de R_1 et R_2 . Quel peut être l'intérêt de ce modèle ?

II-2 Propagation d'ondes « électriques » dans le câble.

- 18 – Établir le système d'équations aux dérivées partielles vérifié par $u(x, t)$ et $i(x, t)$.
- 19 – Montrer que $u(x, t)$ vérifie l'équation (E) :

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{R}{L} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \quad (\text{E})$$

Quelle est l'équation vérifiée par $i(x, t)$? D'où pourraient provenir, dans un système mécanique, les termes $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ et en $-\frac{\partial u}{\partial t}$? le terme en $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ s'appelle *terme de diffusion* ; dans quelle mesure l'équation (E) peut-elle modéliser une chaîne de ressort liant des masses identiques, ces dernières subissant un frottement fluide ?

□ 20 – Soient $p_j(x, t) = -Ri^2$ la puissance linéique dissipée par effet Joule dans le câble, w l'énergie électromagnétique emmagasinée par unité de longueur et Π la puissance électrocinétique entrant à l'abscisse x . Montrer que l'interprétation énergétique de (E) peut s'écrire sous la forme $\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi(x, t)}{\partial x} + p_j(x, t)$; commenter.

□ 21 – On introduit les paramètres $V_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ et $\tau = \frac{L}{R}$. Exprimer ces paramètres en fonction de ceux du câble et donner leur signification physique.

□ 22 – Estimer L , C et R , puis V_0 , Z_0 et τ . On prendra $f = 10$ MHz et on n'hésitera pas à prendre (en la commentant) toute initiative conduisant à une estimation de R .

□ 23 – Montrer que (E) admet une solution de la forme $\underline{u}(x, t) = \underline{U}_0 e^{j(\omega t - k(\omega)x)}$, où ω et k sont reliés par une relation à préciser. Pourrait-on prévoir que $k(\omega)$ serait complexe ? Quels sont les sens physiques respectifs de la partie réelle et de la partie imaginaire de k ?

□ 24 – Estimer, avec les valeurs obtenues à la question 22, l'atténuation en amplitude pour $x = d = 50$ m dans le cas d'une onde monochromatique se propageant dans le câble dans le sens des x croissants.

II-3 Exemple d'oscillations propres dans le câble.

Le câble précédent est désormais placé dans les conditions suivantes indiquées à la fig. 5. A l'entrée du câble, en $x = 0$, on branche, en parallèle avec une capacité C_1 , un composant non linéaire (diode Tunnel), dont la caractéristique courant-tension, avec les sens indiqués pour u_d et i_d , est donnée (fig. 6) par $i_d = S_0 u_d \left(1 - \frac{u_d^2}{3u_0^2} \right)$, où S_0 et u_0 sont des constantes.

Le câble est d'autre part fermé par un court-circuit en $x = d$ (i.e. les cylindres (C_1) et (C_e) sont reliés par un fil métallique en $x = d$). On introduit alors les grandeurs sans dimen-

sion suivantes (cf. aussi question 21) :

$$X = \frac{x}{d} \quad \theta = \frac{V_0 t}{d} \quad U(X, \theta) = \frac{u(x, t)}{u_0} \quad \alpha = \frac{d}{V_0 \tau} \quad \beta = \frac{C_1}{Cd} \quad S = S_0 \frac{Z_0^2}{Rd}$$

Remarquer que $RS_0 d = \alpha^2 S$. On suppose dans la suite $\alpha \ll 1$.



Fig. 5 : oscillateur à constantes réparties

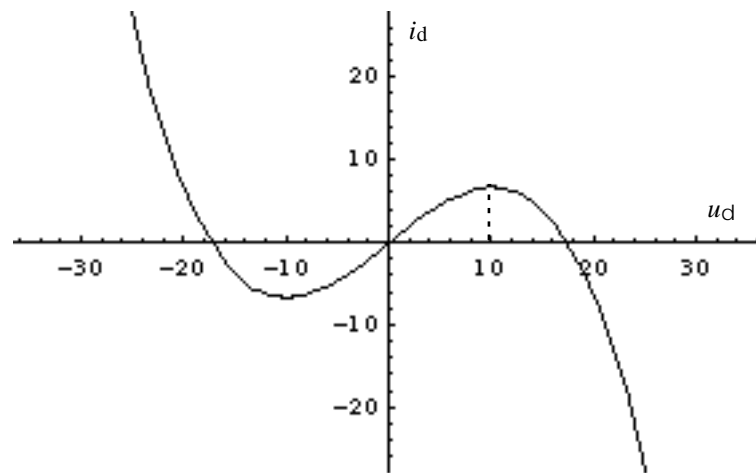


Fig. 6 : allure de la relation courant-tension dans une diode tunnel ; les graduations des axes sont parfaitement arbitraires. On a pris $u_0 = 10$.

□ 25 – Après avoir établi, en variables ordinaires, la relation entre $i(0, t)$, u_d et ses dérivées, montrer qu'au premier ordre en α , les conditions aux limites prennent la forme :

$$\left. \frac{\partial U(X, \theta)}{\partial X} \right|_{X=0} - \beta \left. \frac{\partial^2 U(X, \theta)}{\partial \theta^2} \right|_{X=0} = \alpha \left\{ \beta - S \left[1 - U(0, \theta)^2 \right] \right\} \left. \frac{\partial U(X, \theta)}{\partial \theta} \right|_{X=0}$$

$$U(1, \theta) = 0$$

□ 26 – On suppose dans cette question seulement que $\alpha = 0$. La forme d'onde s'exprime, de façon générale, dans ce cas par $u(x) = u_1 \exp(\omega t - kx) + u_2 \exp(\omega t + kx)$. On appelle *mode stationnaire* de pulsation réduite Ω une solution de la forme :

$$U(X, \theta) = \operatorname{Re}[\underline{U}(X, \theta)] = \operatorname{Re}[f(X)\exp(i\Omega\theta)]$$

Montrer que les pulsations propres forment un ensemble dénombrable $\{\Omega_p, p \text{ entier naturel}\}$. Indiquer comment on peut les établir graphiquement.

□ 27 – On suppose qu'à $\theta < 0$, le câble n'est parcouru par aucun courant ni aucune intensité. On le perturbe alors légèrement (grâce à un générateur placé par exemple en série avec la capacité C_1 et appliquant un échelon de faible amplitude et de faible durée).

On recherche, au voisinage de $\theta = 0$, une solution de la forme proposée en (26) avec, au premier ordre en α : $\Omega = \Omega_p + \alpha\Lambda + o(\alpha)$ où Λ est *a priori* complexe et $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{o(\alpha)}{\alpha} = 0$.

Expliquer pourquoi on peut, dans cette démarche, omettre le terme en $[U(0, \theta)]^2$ (et donc chercher des solutions de la forme donnée à la question 26). Préciser le sens de *faible amplitude* et de *faible durée*.

Présentation de calculs intermédiaires :

On aura trouvé plus haut : $f(X) = A\exp(iKX) + B\exp(-iKX)$, où $K = \Omega_p + \alpha\left(\Lambda - \frac{i}{2}\right)$ et où A et B sont des constantes d'intégration. Le système linéaire traduisant les conditions aux limites est non trivial si $\tan K = \frac{K}{\beta\Omega^2 - i\alpha\Omega(\beta - S)}$; au premier ordre en α , on établit que

$$\tan K = \frac{1}{\beta\Omega_p} + \frac{\alpha}{2}(2\Lambda - i) \left[\frac{1 + (\beta\Omega_p)^2}{(\beta\Omega_p)^2} \right] + o(\alpha)$$

$$\frac{K}{\beta\Omega^2 - i\alpha\Omega(\beta - S)} = \frac{1}{\beta\Omega_p} \left[1 + \frac{\alpha}{2} \frac{2\Lambda - i}{\Omega_p} - \frac{2}{\Omega_p} \Lambda\alpha + \frac{i\alpha}{\beta\Omega_p} (\beta - S) \right]$$

□ 28 – Montrer que, S étant fixé, les seuls modes pouvant être *auto-excités*, c'est-à-dire non atténués au cours du temps, sont ceux dont les pulsations vérifient l'inégalité

$$G(\Omega_p) = \frac{1 + \beta + (\beta\Omega_p)^2}{2} < S. \text{ Quel est l'élément moteur de cette excitation ?}$$

□ 29 – En réalité, le mode propre stationnaire de pulsation Ω_p vérifiant les deux conditions aux limites de la question 25 n'est stable que si $S - G(\Omega_p) > \frac{1}{2} [S - G(\Omega_0)]$, où Ω_0 est la plus petite pulsation propre trouvée en 26. Déterminer géométriquement les modes propres qui peuvent être " auto-excités " ou " stabilisés " dans le câble. Conclure. Quel est l'intérêt du système étudié ?

FIN DE CE PROBLÈME

FIN DE L'ÉPREUVE