CONCOURS D'ADMISSION MINES/PONTS 1998
SECONDE EPREUVE DE PHYSIQUE
Filière MP

Correcteur : Christophe BOECKEL professeur au lycée Mohamed V de CASABLANCA

1 - Le prix Nobel de physique 1997 a récompensé le Français **Claude Cohen-Tannoudji** (laboratoire Kastler-Brossel de l'Ecole Normale Supérieure) et deux Américains **Steven Chu et William D.Phillips** pour des travaux sur le refroidissement des atomes à l'aide de lasers. En 1985 Steven Chu mis en œuvre la lumière convergente de six lasers pour ralentir des atomes de sodium. Le refroidissement obtenu était de seulement 240 μK en dessus du zéro absolu. Trois ans plus tard, William D.Phillips observait des températures six fois inférieures. L'équipe de Claude Cohen-Tannoudji atteignait 2,5 μK puis 0,18 μK avec des atomes de césium.
Ces recherches fondamentales ont déjà donné lieu à des applications avec la mise au point d'une horloge à atomes froids cent à mille fois plus précise que les instruments actuels (réclamées, entre autres, par les concepteurs des nouveaux systèmes de navigation et de localisation GPS) .
Rm : L'élève « malin » aura remarqué que la lecture à la fin de l'énoncé permettait de répondre à cette première question et donnait d'autre part un certains nombres d'informations et d'ordres de grandeur utiles pour la résolution du problème.

1ère Partie : pression de radiation résonante

2 - La force magnétique s'exerçant sur une charge q de vitesse v est négligeable devant la force électrique si $\frac{v}{c} << 1 \; avec \; B = \frac{E}{c}$,c'est à dire si la charge est non relativiste.
Les atomes considérés ont une vitesse de l'ordre de 1km/s (voir fin de l'énoncé) donc une vitesse très inférieure à la vitesse de la lumière.
L'approximation est donc justifiée.

En utilisant la notation complexe $\underline{x} = \underline{x_o} \exp(j\omega t)$ dans l'équation (A) il vient : $\underline{x_o} = \dfrac{\frac{q}{m} E_o}{\omega_o^2 - \omega^2 + j\omega\gamma}$ d'où :

$$\boxed{x_o = \frac{\frac{qE_o}{m\omega_o}}{\sqrt{4\Delta^2 + \gamma^2}} \; ; \; \sin\varphi = \frac{\gamma}{\sqrt{4\Delta^2+\gamma^2}} \; et \; tg\varphi = \frac{\gamma}{2\Delta} \; .}$$

Energie absorbée

3 - Le travail élémentaire de la force électrique est :
$\delta W = q\mathbf{E}.\mathbf{v}dt = -qE_o x_o \omega_o \cos\omega t \sin(\omega t - \varphi)dt = \frac{1}{2} qE_o x_o \omega_o (\sin\varphi + \sin(2\omega t - \varphi))dt$. Comme $<\sin(2\omega t-\varphi)>=0$ la puissance moyenne absorbée par l'électron est : $\boxed{\langle P \rangle = \frac{1}{2} qE_o x_o \omega_o \sin\varphi = \frac{q^2\gamma E_o^2}{2m(4\Delta^2+\gamma^2)}}$

4 - L'émission des photons par l'atome- à la différence de l'absorption - est isotrope, ainsi **en moyenne** la variation de quantité de mouvement est nulle. En supposant qu'il y ait en moyenne γ ($\gamma \approx R$) absorptions de photons par seconde: $a \approx \gamma\delta V = \frac{\gamma\hbar\omega}{Mc} \approx 10^5 ms^{-2} >> g$. C'est évidemment une décélération.

5 - Appelons τ une estimation du temps d'arrêt : $\tau \approx \frac{V_{th}}{a} \approx 10^{-2} s$ et d la distance d'arrêt : $d \approx \frac{V_{th}^2}{2a} \approx$ qq mètres.

Force associée à l'absorption

6 - On sait que pour une onde plane dans le vide le vecteur de Poynting $\Pi = \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{\mu_o} = \varepsilon_o c E^2 \mathbf{e_x}$ $(B = E/c)$ qui est une puissance par unité de surface (W.m^{-2}). L'intensité de rayonnement qui est la valeur moyenne de la norme du vecteur de Poynting est donc une puissance surfacique et s'exprime en W.m^{-2}.

7 - R est le rapport d'une puissance par une énergie (c'est le nombre moyen de photons absorbés par un atome par unité de temps) et s'exprime en s^{-1}. A chaque absorption la quantité de mouvement de l'atome varie de $\frac{\hbar\omega}{c}$ (conservation de la quantité de mouvement, choc inélastique). Par unité de temps il y a en moyenne R chocs, donc la variation moyenne par unité de temps de la quantité de mouvement de l'atome qui représente également la force moyenne exercées sur l'atome est : $\boxed{\langle \mathbf{F} \rangle = R\hbar\mathbf{k} = \frac{\langle P \rangle}{\hbar\omega}\hbar\mathbf{k} = \frac{\frac{I}{I_s}}{1+\frac{4\Delta^2}{\gamma^2}}\hbar\gamma\mathbf{k}}$ (d'après la question 3 -) avec $\frac{I}{I_s} = \frac{q^2 E_o^2}{2m\gamma^2\hbar\omega}$

La force est dans le sens de la propagation du faisceau laser. Dans le cas de la figure 1, il s'agit d'une force de freinage.

Application numérique

8 - La masse d'un atome de sodium est M=3,82.10^{-26}kg (on rappelle que le nombre d'Avogadro est égale à 6,02.10^{23}mol^{-1}, à connaître) $R = 1{,}55.10^7\, s^{-1}$ (de l'ordre de grandeur de γ) $a \approx \frac{\langle F \rangle}{M} = 4{,}33.10^5\, m.s^{-2}$.

2ème Partie : refroidissement Döppler

Décalage Döppler

9 - En développant ω' à l'ordre 1 en V/c il vient : $\omega' = \omega\left(1-\frac{V}{c}\right)$ soit $\delta\omega_D = \omega' - \omega = -kV$ (k=ω/c)

En reprenant l'expression de <F> de la question 7 et en posant $\Delta' = \omega' - \omega_o = \Delta - kV = \Delta\left(1-\frac{kV}{\Delta}\right)$,on obtient :

$$\boxed{\langle \mathbf{F} \rangle = \frac{\frac{I}{I_s}}{1+\frac{4\Delta'^2}{\gamma^2}}\hbar\gamma\mathbf{k} = \frac{\frac{I}{I_s}}{1+4\frac{\Delta^2}{\gamma^2}\left(1-\frac{kV}{\Delta}\right)^2}\hbar\gamma\mathbf{k}}$$

Si le laser agit continûment sur l'atome celui ci va être dans un premier temps freiné puis accéléré lorsque sa vitesse s'annule. Ce n'est évidemment pas ce que l'on veut réaliser, d'où l'idée d'illuminer l'atome par deux faisceaux de même intensité et de même pulsation, en travaillant comme on va le voir à une pulsation légèrement inférieure à la pulsation de la résonance.

Force dépendant de la vitesse

10 - Avec des notations évidentes on obtient sans difficulté :

$$\langle \mathbf{F}_+ \rangle = \frac{\frac{I}{I_s}}{1+4\frac{\Delta^2}{\gamma^2}\left(1-\frac{kV}{\Delta}\right)^2}\hbar\gamma\mathbf{k} \text{ et } \langle \mathbf{F}_- \rangle = -\frac{\frac{I}{I_s}}{1+4\frac{\Delta^2}{\gamma^2}\left(1+\frac{kV}{\Delta}\right)^2}\hbar\gamma\mathbf{k}\ ;\ \mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{e_x}$$

(On remarquera que comme V>0 $\omega'_+ < \omega < \omega'_-$)

Il y a freinage si $F_- > F_+$ soit $\boxed{\Delta < 0}$; la force radiative exercée par le faisceau se propageant dans le sens des x négatifs est la plus importante.

11 - $$\mathbf{F} = \langle \mathbf{F}_+ \rangle + \langle \mathbf{F}_- \rangle = \frac{I}{I_s}\left(\frac{1}{1+4\frac{\Delta^2}{\gamma^2}\left(1-\frac{kV}{\Delta}\right)^2} - \frac{1}{1+4\frac{\Delta^2}{\gamma^2}\left(1+\frac{kV}{\Delta}\right)^2}\right)\hbar\gamma\mathbf{k}$$

Pour kV<<Δ : $\left(1+\frac{kV}{\Delta}\right)^2 \approx 1+2\frac{kV}{\Delta}$ *et* $\left(1-\frac{kV}{\Delta}\right)^2 \approx 1-2\frac{kV}{\Delta}$ on obtient une force proportionnelle à la vitesse (analogue à un frottement visqueux) :

$$\mathbf{F} = -\frac{16\hbar k^2}{\left[1+\left(\frac{2\Delta}{\gamma}\right)^2\right]^2}\frac{I}{I_s}\left(\frac{-\Delta}{\gamma}\right)\mathbf{V}$$ de la forme $\mathbf{F} = -\alpha\mathbf{V}$ avec $\boxed{\alpha = 16\hbar k^2\left[1+\left(\frac{2\Delta}{\gamma}\right)^2\right]^{-2}\frac{I}{I_s}\left(\frac{-\Delta}{\gamma}\right)}$

D'après la courbe (fig3) $|F|$ est maximale pour $\frac{kV}{|\Delta|} \approx \frac{kV}{\gamma} \approx 1$ soit $V \approx \frac{\gamma\lambda}{2\pi} \approx 6 m.s^{-1}$

A la température ambiante $T \approx 300K$ et $V_{ambiant} \approx \sqrt{\frac{2k_B T}{M}} \approx 500 m.s^{-1}$

La vitesse des atomes pour laquelle $|F|$ est maximale est de l'ordre de 100 plus faible que la vitesse de ces mêmes atomes à température ambiante, la température étant environ 10000 fois plus faible soit de l'ordre de 30mK . La force de freinage est donc infiniment plus efficace sur des atomes froids de vitesse de quelques mètres par seconde.

12 - Le théorème de la puissance cinétique appliquée à un atome donne :

$\frac{dE}{dt} = \mathbf{F.V} = -\alpha V^2$ avec $E = \frac{1}{2}MV^2$ d'où $\frac{dE}{dt} + \frac{E}{\tau} = 0$ $\boxed{\tau = \frac{M}{2\alpha} = \frac{M}{32\hbar k^2}\left[1+\left(\frac{2\Delta}{\gamma}\right)^2\right]^2 \frac{I_s}{I}\left(\frac{\gamma}{-\Delta}\right)}$

ainsi $\boxed{E = E_o \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$ τ représente le temps caractéristique de décroissance de l'énergie cinétique de l'atome.

A.N. : avec λ=589nm, τ=8,4 µs (c'est bref !)

3ème Partie: chauffage dû au recul

13 - Pour les faibles vitesses $R_+ \approx R_- \approx \frac{I}{I_s} \frac{\gamma}{1+\frac{4\Delta^2}{\gamma^2}}$, $dE_{th} = \frac{1}{2M} d\left\langle p^2 \right\rangle = \frac{1}{2M} 4\left(\frac{I}{I_s} \frac{\gamma}{1+4\Delta^2/\gamma^2}\right)(\hbar k)^2 dt$

Soit: $\boxed{\left(\frac{dE}{dt}\right)_{thermique} = \frac{2}{M}\left(\frac{I}{I_s}\frac{\gamma}{1+4\Delta^2/\gamma^2}\right)(\hbar k)^2}$

14 - On a vu dans la question 12 que si on ne tient compte que du refroidissement Döppler: $\left(\frac{dE}{dt}\right)_{Doppler} = -\frac{E}{\tau}$.

Avec τ>0 si Δ<0.

A l'équilibre thermodynamique: $\left(\frac{dE}{dt}\right)_{thermique} + \left(\frac{dE}{dt}\right)_{Doppler} = 0$ d'où $\boxed{E = \frac{\gamma^2 \hbar}{-32\Delta}\left[1+\left(\frac{2\Delta}{\gamma}\right)^2\right]}$

Température minimale

15 - $E = \frac{1}{2}k_B T$ d'où $T = \frac{\gamma^2\hbar}{-16k_B\Delta}\left(1+\left(\frac{2\Delta}{\gamma}\right)^2\right) = \frac{\gamma\ \hbar}{8k_B\Delta}\left(\frac{\gamma}{-2\Delta} + \frac{-2\Delta}{\gamma}\right)$ minimale pour $\frac{-2\Delta}{\gamma} = 1$ soit $\boxed{\Delta = -\frac{\gamma}{2}}$

16 - La température minimale T_{min} est obtenue pour $\Delta = -\frac{\gamma}{2}$ soit $\boxed{T_{min} = \frac{\gamma\hbar}{4k_B}}$

A.N. T_{min}=112µK, c'est l'ordre de grandeur de la température trouvée par le Steven Chu avec des atomes de sodium, l'équipe de Cohen-Tannoudji ayant atteint 0,18 µK avec des atomes de césium.