A 99 PHYS. I

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 1999

PREMIÈRE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Filière MP

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Sujet mis à disposition du concours ENTPE

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

PHYSIQUE I -MP

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP, comporte 4 pages.

- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

- Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être utilisé pour les questions ultérieures, même s'il n'a pas été démontré.

- Il ne faudra pas hésiter à formuler les commentaires (incluant des considérations numériques) qui vous sembleront pertinents, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

Notations : vecteur : **V** (gras) ; norme du vecteur **V** : *V* (italique) ; vecteur unitaire : $\hat{\mathbf{v}}$.

Le vecteur de Landau-Avron-Sivardière

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à une particule de masse *m* dans un référentiel galiléen $\mathrm{R}\left(\mathrm{O},\hat{\mathbf{i}},\hat{\mathbf{j}},\hat{\mathbf{k}}\right)$ se traduit par la relation $\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}=\mathbf{F}$, en notant **p** = m**v** la quantité de mouvement de la particule et **F** la résultante des forces qui agissent sur elle. Si cette résultante est nulle, la quantité de mouvement est une intégrale première du mouvement. S'il existe un vecteur **P** dépendant de la position et de la vitesse de la particule et tel que $\mathbf{F}=-\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}(\mathbf{r},\mathbf{v})}{\mathrm{d}t}$, alors $\mathbf{L}=\mathbf{p}+\mathbf{P}$ est une intégrale première du mouvement, appelée *intégrale première de Landau* par Jean Sivardière (1988), après son introduction par Avron (1986). Ce problème propose l'étude de telles intégrales premières.

I- Mouvement d'une particule dans un champ magnétique uniforme

Une particule de masse *m* et de charge q est mobile dans un champ magnétique uniforme **B** porté par l'axe Oz du référentiel galiléen $\mathrm{R}\left(\mathrm{O},\hat{\mathbf{i}},\hat{\mathbf{j}},\hat{\mathbf{k}}\right)$. On note **r** et **v** les vecteurs position et vitesse de la particule à l'instant *t*. À l'instant initial, $\mathbf{r}_0 = a\,\hat{\mathbf{i}}$ et $\mathbf{V}_0 = V_0\,\hat{\mathbf{j}}$.

❑ **1** – Montrer que la trajectoire est plane et que le module de la vitesse est constant.

❑ **2** – Montrer que le vecteur $\mathbf{L} = m\mathbf{v} + q\mathbf{B} \wedge \mathbf{r}$ est un vecteur de Landau.

❑ **3** – En déduire l'expression du vecteur position : $\mathbf{r} = \dfrac{1}{qB^2}\left(\mathbf{L} \wedge \mathbf{B} + \mathbf{B} \wedge m\mathbf{v}\right)$.

❑ **4** – Le vecteur **L** dépend de l'origine O. Soit le repère $\mathrm{R}'\left(\mathrm{O}', \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\right)$ avec **OO'** = **b**, vecteur constant. Déterminer **b** pour que le vecteur de Landau **L'** dans R' soit le vecteur nul.

❑ **5** – En déduire le vecteur position **r'** dans R', ainsi que la trajectoire de la particule dans R' ; retrouver ainsi les résultats classiques.

❑ **6** – Déterminer l'expression du vecteur de Landau lorsque, en plus du champ magnétique, la particule est soumise à un champ électrique $\mathbf{E} = E_0\,\hat{\mathbf{i}}$ et à une force de frottement fluide - k **v**, où E_0 et *k* sont des constantes.

II- Le vecteur de Hamilton

Dans un champ central « en $1/r^2$ », une particule de moment cinétique σ et de masse *m* possède l'intégrale première de Landau $\mathbf{H} = m\mathbf{v} - \dfrac{c}{\sigma^2}\left(\sigma \wedge \hat{\mathbf{u}}\right)$, où $\hat{\mathbf{u}}$ est le vecteur unitaire de la direction OM et *c* une constante.

❑ **7** – Quelle est l'expression de *c* si la particule est mobile autour d'une masse ponctuelle *M* localisée en O ?

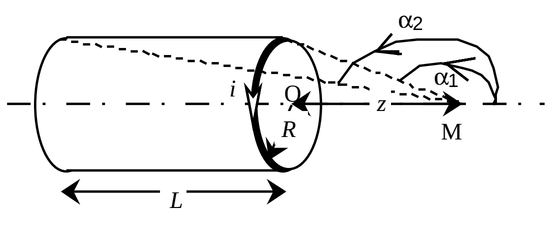
On porte le vecteur **v** à partir d'un point O'. Quand la particule décrit sa trajectoire, l'extrémité du vecteur **v** décrit *l'hodographe* du mouvement.

❑ **8** – Quelle est la forme de l'hodographe ? quel est le type de trajectoire obtenu, selon que O est à l'extérieur ou à l'intérieur de la courbe représentative de l'hodographe ?

❑ **9** – Quelle est la direction du vecteur de Hamilton ?

❑ **10** – On définit le vecteur **e** par $\mathbf{e} = \dfrac{\mathbf{H} \wedge \sigma}{c}$, où *c* a l'expression trouvé à la question 7. Quelle est la direction du vecteur **e** ? En considérant le produit scalaire **r.e**, retrouver l'équation polaire de la trajectoire et préciser la signification de la norme de **e**.

III- Champ magnétique homopolaire

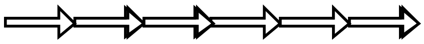


On bobine *n* tours de fil par unité de longueur d'un solénoïde de rayon *R* et de longueur *L*. Le champ d'induction magnétique en un point M de l'axe du solénoïde situé à l'abscisse *z* du centre O de la face la plus proche est (voir figure) : $B = k\mu_0\, ni\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right)$, où *i* est l'intensité, constante, du courant dans le fil.

❑ **11** – En se référant à un cas particulier, déterminer la valeur de la constante k.

❑ **12** – Montrer que, lorsque $R << z << L$, le champ s'exprime par $\mathbf{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q_m}{z^2}\hat{\mathbf{k}}$ et préciser la valeur de la constante q_m.

On considère une suite infinie de dipôles électriques jointifs placés sur la partie négative de l'axe Oz et orientés parallèlement à cet axe ; chaque dipôle, de moment dipolaire $\mathbf{p}$, est constitué de deux charges ponctuelles $-q$ et $+q$, séparées d'une distance d telle que $p = qd$.



❑ **13** – Exprimer le champ électrique au point M sur la partie positive de l'axe Oz. Que peut-on dire de la charge q par rapport au moment dipolaire par unité de longueur ?

❑ **14** – Quelle est l'expression du moment magnétique associé à une spire du solénoïde ? montrer, en utilisant l'analogie avec la suite de dipôles électriques de la question 13 que tout se passe comme si le champ au point M était celui d'une charge magnétique hypothétique isolée (*monopole magnétique* …) placée au point O.

IV- Le vecteur de Landau généralisé

❑ **15** – Donner l'expression du théorème du moment cinétique en O dans R, appliqué au mouvement d'une particule dans un champ de force **F**. On suppose que le moment de la force **F** au point O s'exprime sous la forme $\mathbf{OM} \wedge \mathbf{F} = -\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{S}}{\mathrm{d}t}$, où **S** est un vecteur dépendant de la vitesse et de a position de la particule. Déterminer l'intégrale première du mouvement, appelée *intégrale première de Landau généralisée*, $\mathbf{L}_{\mathrm{g}}$.

❑ **16** – On admet que le champ d'induction magnétique du monopole magnétique en dehors de la partie négative de l'axe Oz s'exprime sous la forme $\mathbf{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q_m}{r^2}\hat{\mathbf{u}}$ et on s'intéresse au mouvement d'une particule de masse m et de charge q dans ce champ. Quelle est alors l'intégrale première de Landau généralisée ?

❑ **17** – Montrer que le mouvement s'effectue sur un cône.

V- Une interprétation du vecteur de Landau

L'équation du mouvement de la particule dans le champ magnétique uniforme **B** porté par l'axe Oz du référentiel galiléen $\mathrm{R}\left(\mathrm{O}, \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\right)$, $\dfrac{\mathrm{d}\,\mathbf{p}}{\mathrm{d}\,t} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$, peut s'écrire, en introduisant le potentiel vecteur **A** $\left(\mathbf{B} = \mathbf{rot}(\mathbf{A})\right)$: $\dfrac{\mathrm{d}\,\mathbf{p}}{\mathrm{d}\,t} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{rot}(\mathbf{A})$.

❑ **18** – Montrer que l'on peut choisir $\mathbf{A} = \dfrac{1}{2}\mathbf{B} \wedge \mathbf{r}$. Ce vecteur ne dépend pas explicitement du temps.

On admettra, sans chercher à les prouver, les deux relations suivantes, relatives à un vecteur **F** ne dépendant que de **r** et de **v** (et donc pas explicitement du temps) :

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{grad}(\mathbf{v}.\mathbf{F}) - (\mathbf{v}.\mathbf{grad})\mathbf{F} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathrm{d}t} = (\mathbf{v}.\mathbf{grad})\mathbf{F}$$

Appliqué au vecteur **F** de composantes F_x, F_y et F_z, l'opérateur (**v**.**grad**) donne le vecteur dont la composante selon x est $\left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}\right) F_x = v_x \frac{\partial F_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial F_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial F_x}{\partial z}$. Les composantes selon les deux autres coordonnées se calculent de façon analogue. La seconde relation n'est qu'une expression de la règle de dérivation en chaîne.

❑ **19** –En utilisant les deux relations admises, montrer que le principe fondamental de la dynamique peut s'écrire $\tilde{U} = -q\mathbf{v}.\mathbf{A}$, où l'on a introduit *l'impulsion généralisée* $\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{p} + q\mathbf{A}$ et *l'énergie d'interaction* $\tilde{U} = -q\mathbf{v}.\mathbf{A}$.

❑ **20** – Tenter d'éclairer le sens physique de la forme inhabituelle donnée ci-dessus à la relation fondamentale de la dynamique, en considérant la question suivante : considérons l'ensemble particule-champ magnétique comme un système isolé ; le vecteur **p** de la particule varie au cours du temps ; comment concilier ce fait avec la conservation de l'impulsion d'un système isolé ?

Par analogie avec la définition usuelle de l'énergie totale, définissons $H = \frac{1}{2m}\tilde{P}^2 + \tilde{U}$ et tentons de donner un sens à cette quantité.

❑ **21** – Montrer que $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{q^2 r^2 B^2}{8m}$. C'est la somme de l'énergie cinétique de la particule et d'un terme au sens moins immédiat.

Considérons alors l'établissement du champ magnétique, à partir d'une situation où il est nul et où la vitesse initiale de la particule est dans le plan xOy. À une certaine phase du processus, l'intensité du champ est $b(t)$ et son taux de variation $\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}$. Supposons ce taux suffisamment faible pour que le rayon de la trajectoire ne varie pas lorsque, pendant le temps dt, le champ varie de db. Le taux de variation du flux à travers la trajectoire circulaire est donc $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \pi r^2 \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}$.

❑ **22** – Montrer, en considérant sa circulation, que le champ électrique associé à cette variation est $E = -\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}$ et par suite que la variation de la vitesse est $\mathrm{d}v = -\left(\frac{qr}{2m}\right)\mathrm{d}b$.

❑ **23** – Montrer que la variation de moment magnétique associé à la trajectoire de la particule est $\mathrm{d}\mu = \left(\frac{qr}{2}\right)\mathrm{d}v$. En déduire la variation de l'énergie potentielle de ce moment dans le champ et, par intégration (sous certaine hypothèse, que l'on ne justifiera que dans la limite du temps disponible) l'énergie associée à l'établissement du champ d'induction magnétique. Conclure en commentant l'expression de la grandeur H.

FIN DU PROBLÈME

FIN DE L'ÉPREUVE