

Corrigé
Concours commun Mines-Ponts-Télécom
SECONDE EPREUVE DE PHYSIQUE - FILIERE MP

Document rédigé par Paul Roux, Saint-Etienne (paul.roux@prepas.org)

SECOUSSES

Première partie : Secousses en Mécanique

□ 1 - L'analyse dimensionnelle permet d'identifier $m \alpha t$ à une force donc αt à une accélération ; α se mesure en m.s^{-3} ; c'est une secousse.

□ 2 - La vitesse de glissement demandée s'écrit $\mathbf{u}_g = \mathbf{v}_{\text{assiette}} - \mathbf{v}_{\text{nappe}}$ donc en projection sur \mathbf{i} , $u_g = v_{\text{assiette}} - v_{\text{nappe}} < 0$ lorsque $t > 0$ puisque l'assiette glisse sur la nappe. Par contre, à l'instant $t = 0^+$, les vitesses restent égales à leur valeur à $t = 0$ soit zéro puisque les forces exercées sur la nappe et l'assiette sont finies : $v(t = 0^+) - v(t = 0^-) = \int_{t=0^-}^{t=0^+} a dt = 0$. On peut donc écrire $u_g = v_{\text{assiette}} - v_{\text{nappe}} = 0$ lorsque $t = 0^+$.

□ 3 - Ecrivons dans R_g le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'assiette, en projection sur \mathbf{i} ; compte tenu du sens de la vitesse de glissement et la force normale d'appui ayant pour valeur $N = Mg$ (en l'absence de mouvement vertical de l'assiette), on peut écrire

$M \frac{d^2 x_a}{dt^2} = fMg$ et l'accélération demandée est constante et vaut $f g$. On en déduit immédiatement $x_a = \frac{gft^2}{2}$, compte tenu des conditions initiales $x_a(0) = 0$ et $\dot{x}_a(t) = 0$.

□ 4 - De même, on écrit l'équation du mouvement du centre de la nappe, sans glissement sur la table et compte tenu du principe des actions réciproques : $m \frac{d^2 x_n}{dt^2} = -fMg + m\alpha t$ qui

s'intègre successivement en $\frac{dx_n}{dt} = -f \frac{M}{m} gt + \frac{\alpha t^2}{2}$ et $x_n = -\frac{fMg}{2m} t^2 + \frac{\alpha}{6} t^3$.

□ 5 - La durée du contact correspond au passage de $x_n - x_a$ de la valeur zéro à $R - r$; on aura donc $x_n(\tau) - x_a(\tau) = R - r = -\frac{fg}{2} \left(\frac{M}{m} - 1 \right) \tau^2 + \frac{\alpha}{6} \tau^3$. Cependant, comme le déplacement de

l'assiette est négligeable, on peut écrire $-\frac{fMg}{2m} \tau^2 + \frac{\alpha}{6} \tau^3 \gg \frac{fg}{2} \tau^2$ soit $\alpha = \frac{6(R-r)}{\tau^3}$ ou, numériquement, $\alpha = 1200 \text{ m.s}^{-3}$. En fin d'expérience, la force à développer est $m \alpha \tau = 600\text{N}$ soit la force égale au poids d'une masse de 600kg ; un enfant ne peut y arriver, et un adulte sans doute pas pendant très longtemps.

□ 6 - Les équations du mouvement s'écrivent, pour la nappe $-T + m\alpha t = m \frac{d^2 x_n}{dt^2}$ et pour

l'assiette $T = M \frac{d^2 x_a}{dt^2}$. L'élimination de T entre ces équations (avec $x_n = x_a$) montre que

$m\alpha t = (m + M) \frac{d^2 x_n}{dt^2}$ d'où on déduit $T = \frac{mM}{M + m} \alpha t$ et la durée de cette première phase est

égale au temps t_1 au bout duquel $T = fMg$; on a donc $t_1 = \frac{M + m}{\alpha m} fg$. Tant que $t < t_1$, on peut

écrire $\frac{d^2 x_a}{dt^2} = \frac{m}{m + M} \alpha t$, $\frac{dx_a}{dt} = \frac{m}{m + M} \frac{\alpha t^2}{2}$ et $x_a = \frac{m}{m + M} \frac{\alpha t^3}{6}$ d'où on tire par substitution

$$\left(\frac{dx_a}{dt}\right)_{t=t_1} = \left(\frac{dx_n}{dt}\right)_{t=t_1} = \frac{M + m}{2\alpha m} f^2 g^2 \quad \text{et} \quad x_a(t_1) = x_n(t_1) = \frac{(M + m)^2 f^3 g^3}{\alpha^2 m^2 6}$$

□ 7 - Il suffit de reprendre les équation établies plus haut en changeant les conditions

initiales ; on a vu $M \frac{d^2 x_a}{dt^2} = fMg$ donc $x_a = \frac{fg}{2}(t - t_1)^2 + \left(\frac{dx_a}{dt}\right)_{t_1} (t - t_1) + x_a(t_1)$ qu'on peut

écrire $x_a = \frac{fg}{2}(t - t_1)^2 + \frac{M + m}{2\alpha m} f^2 g^2 (t - t_1) + \frac{(M + m)^2 f^3 g^3}{6\alpha^2 m^2}$. De même

$m \frac{d^2 x_n}{dt^2} = -fMg + m\alpha t$ et

$$x_n = \frac{\alpha}{6}(t - t_1)^3 - \frac{fMg}{2m}(t - t_1)^2 + \frac{M + m}{2\alpha m} f^2 g^2 (t - t_1) + \frac{(M + m)^2 f^3 g^3}{6\alpha^2 m^2}$$

□ 8 - On écrit encore $x_n - x_a = R - r$ donc $R - r = \frac{\alpha}{6}(t_c - t_1)^3 - \frac{fMg}{2m}(t_c - t_1)^2 \left(\frac{M}{m} - 1\right)$;

toutefois, si on néglige encore le déplacement de l'assiette devant celui de la nappe, on peut

affirmer que $\frac{\alpha}{6}(t_c - t_1)^3 - \frac{fMg}{2m}(t_c - t_1)^2 \gg \frac{fg}{2}(t_c - t_1)^2$ ce qui permet de réduire l'équation

demandée à $6(R - r) = \alpha(t_c - t_1)^3$ et, numériquement, $\alpha = 1200 \text{m.s}^{-3}$ comme précédemment.

On a alors pour durée de la première phase $t_1 = 0,015 \text{s}$.

□ 9 - Si on tire *lentement*, la masse m reste pratiquement en équilibre à chaque instant ; elle reçoit alors du ressort du bas la force $T_2 = F$ et du ressort du haut la tension T_1 ; son équilibre impose que $T_1 = F + mg > F$. Au contraire, si on tire *rapidement*, la masse m ne bouge pratiquement pas et la tension du ressort supérieur reste égale à sa valeur initiale, quelle que soit F .

En tirant lentement, le ressort R_1 se brise d'abord ; en tirant rapidement, c'est le ressort R_2 .

□ 10- Les ressorts étant sans masse, les forces exercées sur leurs deux extrémités sont égales entre elles et à la tension du ressort étudié. On a donc pour expression des forces exercées sur S la tension $\mathbf{T}_2 = m \alpha t \mathbf{i}$ (\mathbf{x} dirige l'axe vertical descendant), le poids $m g \mathbf{i}$ et la tension \mathbf{T}_1 qu'on écrira $-k x_1 \mathbf{i}$; on a donc $m\ddot{x}_1 = -kx_1 + m\alpha t + mg$ (équation linéaire) ; la solution générale de l'équation homogène est $x_1 = A \sin(\omega t + \varphi)$ et une solution particulière de l'équation

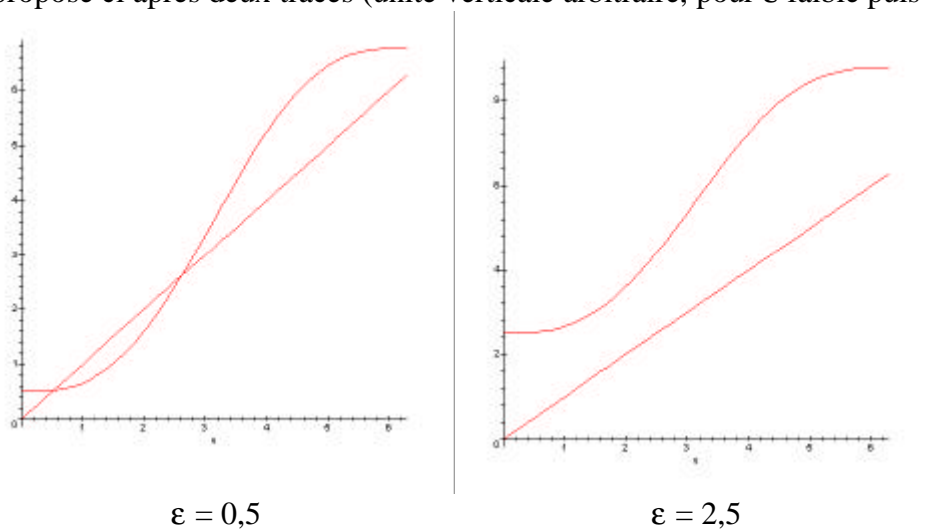
complète est $x_1 = \frac{mg}{k} + \frac{m\alpha}{k}t$; en l'absence de forces infinies, la vitesse initiale est nulle ce qui fournit $\omega A \cos \varphi = -\frac{m\alpha}{k}$ et la position initiale impose $A \sin \varphi = 0$; on peut choisir $\varphi = 0$

sans perte de généralité et on obtient bien $x_1 = \frac{mg}{k} + \frac{m\alpha}{k} \left(t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right)$.

□ 11- La tension $T_2(u)$ vaut, on l'a vu, $m \alpha t$ que l'on écrira $T_2(u) = \frac{m\alpha}{\omega} u$. La tension T_1 est,

elle, donnée (en module) par $T_1 = k x_1$ donc $T_1(u) = \frac{m\alpha}{\omega} (\varepsilon + u - \sin u)$.

□ 12- On propose ci-après deux tracés (unité verticale arbitraire, pour ε faible puis élevé) :



Il y aura possibilité d'intersection si $\sin u = \varepsilon$ a au moins une solution, donc si $\varepsilon \leq 1$.

□ 13- Le ressort R_1 cassera en premier si la valeur T_r est atteinte pour T_1 alors que $T_1 > T_2$, donc avant la première intersection, lorsque $u = \arcsin \varepsilon$. La condition limite correspondante

est donc $T_2(\arcsin \varepsilon) = T_r$ qui s'écrit $\frac{T_r}{mg} = \frac{\arcsin \varepsilon}{\varepsilon}$.

□ 14- On a ici $\frac{T_r}{mg} = \frac{kx_r}{mg} = 1,16$ donc $\varepsilon = 0,80$ et $\alpha_L = 176 \text{m.s}^{-3}$.

□ 15- On devrait tenir compte, dans une modélisation plus réaliste, de la **masse** non nulle des ressorts et d'effets de **non linéarité** pour ceux-ci. La pris en compte de la masse des ressorts augmente la seule tension T_1 et le ressort R_1 cassera plus facilement, donc pour $\alpha < \alpha^*$ avec $\alpha^* < \alpha_L$ calculé ci-dessus.

Première partie : Secousses et Rayonnement

□ 16- D'après l'énoncé, les effets radiatifs sont significatifs dès que $E_{\text{rad}} = E_0$ ou, en considérant une accélération constante a , dès que $\frac{2}{3} \frac{q^2 T}{4\pi\epsilon_0 c^3} a^2 = ma^2 T^2$ ou $T = \tau = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^3}$.

□ 17- Numériquement, $\tau = 6,32 \cdot 10^{-24} \text{s}$; la distance parcourue par la lumière pendant cette durée est $\tau c = 1,90 \cdot 10^{-13} \text{m}$.

□ 18- Dans un mouvement circulaire uniforme, $a = \omega_0^2 d$ en lisant l'énoncé en termes de vitesse (et non fréquence) angulaire. On a aussi $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Le critère de prise en compte des effets radiatifs est alors $m\omega_0^2 d^2 = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{2\pi}{\omega_0} \omega_0^4 d^2 = m\tau \frac{2\pi}{\omega_0} \omega_0^4 d^2$ qui se simplifie selon

$\tau = \frac{1}{2\pi\omega_0} = \frac{T}{4\pi^2}$ pratiquement comme dans le cas d'un mouvement linéaire.

□ 19- L'équation proposée énonce que la puissance totale dissipée par la force de réaction (freinage de rayonnement ou Bremsstrahlung) est égale à la puissance totale rayonnée dans le même intervalle de temps : $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{\text{rad}} \cdot \mathbf{v} dt = - \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt$. Le signe - signale une force de freinage, l'énergie rayonnée étant perdue par la particule qui rayonne cette énergie sous forme de champ électromagnétique.

□ 20- L'intégration par parties mène à $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{a}(t) \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} dt = [\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{v}(t)]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{a}}(t) \cdot \mathbf{v}(t) dt$ donc en

core à $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{\text{rad}} \cdot \mathbf{v} dt = - \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} [\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{v}(t)]_{t_1}^{t_2} + \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{a}}(t) \cdot \mathbf{v}(t) dt$.

□ 21- L'hypothèse de SCHOTT revient à considérer par exemple que le produit scalaire $\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}$ est quasi-périodique, et qu'on ne considère les effets radiatifs que sur des durées moyennées sur un nombre entier de périodes; on en déduit que $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{\text{rad}} \cdot \mathbf{v} dt \approx \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{a}}(t) \cdot \mathbf{v}(t) dt$; en considérant que ce résultat est vrai pour « presque » tous les couples (t_1, t_2) on obtient la

formule d'ABRAHAM-LORENTZ : $\mathbf{F}_{\text{rad}} = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{d\mathbf{a}}{dt} = m\tau \frac{d\mathbf{a}}{dt}$.

□ 22- Pour une particule non chargée, on retrouve évidemment $\tau = 0$ donc $m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{\text{ext}}$, c'est-à-dire l'équation de NEWTON.

□ 23- En l'absence de toute force extérieure, l'équation du mouvement devient $\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{1}{\tau} \mathbf{a}$ qui s'intègre en $\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}(0) \exp\left(\frac{t}{\tau}\right)$. On en déduit $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) + \tau \mathbf{a}(0) \left[\exp\left(\frac{t}{\tau}\right) - 1 \right]$ donc

$\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{v}(t) = \mathbf{a}(0) \cdot \mathbf{v}(0)e^{\frac{t}{\tau}} + \tau a^2(0) \left[e^{\frac{2t}{\tau}} - e^{\frac{t}{\tau}} \right]$ qui n'est évidemment pas constant ; en l'absence de toute périodicité même partielle, l'hypothèse de SCHOTT n'est bien sûr pas vérifiée.

□ 24- On a $\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \exp\left(\frac{t}{\tau}\right) \left[\frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{1}{\tau} \mathbf{a} \right]$ et [3] devient $\frac{\mathbf{F}_{\text{ext}}}{m} = -\tau \exp\left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{d\mathbf{A}}{dt}$ qu'on écrira encore $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = -\frac{1}{\tau} \frac{\mathbf{F}_{\text{ext}}(t)}{m} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ qui s'intègre selon $\mathbf{A}(t) = -\frac{1}{m\tau} \int_0^t \mathbf{F}_{\text{ext}}(u) \exp\left(-\frac{u}{\tau}\right) du$ d'où encore $\boxed{m\mathbf{a}(t) = \frac{1}{\tau} \int_0^t \mathbf{F}_{\text{ext}}(u) \exp\left(-\frac{u-t}{\tau}\right) du}$ comme demandé.

□ 25- Faisons dans l'équation [4] le changement de variable $u - t = \tau w$; on obtient alors $m\mathbf{a}(t) = \int_0^{\frac{t_0-t}{\tau}} \mathbf{F}_{\text{ext}}(t + \tau w) \exp(-w) dw$ et l'équation de DIRAC-PLASS revient à choisir pour instant t_0 tel que $\mathbf{a} = 0$ un moment suffisamment lointain de l'instant t considéré, c'est-à-dire à supposer qu'au bout d'une durée supérieure à un grand nombre de fois τ , l'accélération est nulle : $t_0 - t \gg \tau \Rightarrow \mathbf{a}(t_0) = \mathbf{0}$. Il vient alors $\boxed{m\mathbf{a}(t) = \int_0^\infty \mathbf{F}_{\text{ext}}(t + \tau u) \exp(-u) du}$.

□ 26- Si on choisit $\mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$ pour $t < 0$ et $\mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{F}_0$ (constante) pour $t \geq 0$, l'expression de DIRAC-PLASS devient, pour $t < 0$, $\mathbf{a}(t) = \frac{\mathbf{F}_0}{m} \int_{-\frac{t}{\tau}}^\infty \exp(-u) du$ car pour tout $-t/\tau < u$, $t + \tau u$ est positif ; on en déduit donc $\boxed{\mathbf{a}(t < 0) = \frac{\mathbf{F}_0}{m} \exp\left(\frac{t}{\tau}\right)}$; cette préaccélération est maximale en $t = 0$.

□ 27- L'accélération initiale dans la forme [4] vaut $\boxed{\mathbf{a}(0) = \frac{1}{m\tau} \int_0^{t_0} \mathbf{F}_{\text{ext}}(u) \exp\left(-\frac{u}{\tau}\right) du}$.

□ 28- [4] s'écrit $\mathbf{a}(t) = \frac{1}{m\tau} \exp\left(\frac{t}{\tau}\right) \int_0^{t_0} \mathbf{F}_{\text{ext}}(u) \exp\left(-\frac{u}{\tau}\right) du$ et on obtient l'expression demandée

$\boxed{\mathbf{a}(t) = \exp\left(\frac{t}{\tau}\right) \left[\mathbf{a}(0) - \frac{1}{m\tau} \int_0^t \mathbf{F}_{\text{ext}}(u) \exp\left(-\frac{u}{\tau}\right) du \right]}$. Lorsque $t \rightarrow \infty$, $\mathbf{a}(t)$ tend vers zéro si le terme entre crochets tend vers zéro plus vite que $\exp(-t/\tau)$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Considérons par exemple le cas d'une force extérieure constante ; l'intégrale qui figure dans ce terme entre crochets s'écrit $\mathbf{F}_{\text{ext}} \int_0^t \exp\left(-\frac{u}{\tau}\right) du = \mathbf{F}_{\text{ext}} \tau \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right)$ et, pour $t \rightarrow \infty$, elle va effectivement décroître comme il est souhaité. Ce sera encore plus vrai si \mathbf{F}_{ext} décroît un tant soit peu lorsque $t \rightarrow \infty$. L'expression obtenue $\boxed{\text{n'est donc pas nécessairement incompatible}}$ avec $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{a}(t) = \mathbf{0}$.

□ 29- Ecrivons de même la loi de NEWTON sous la forme $m[\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(0)] = \int_0^t \mathbf{F}_{\text{ext}} du$ en remarquant que $m[\mathbf{v}(\infty) - \mathbf{v}(0)] = \int_0^\infty \mathbf{F}_{\text{ext}} du$; la différence de ces deux expressions, compte tenu que

$\mathbf{v}(\infty) = \mathbf{0}$, s'écrit bien
$$m\mathbf{v}(t) = - \int_t^\infty \mathbf{F}_{\text{ext}}(u) du.$$

□ 30- Il ne s'agit que d'une apparence ; on doit en fait tenir compte du fait que $\mathbf{v}(0)$ aussi semble déterminée par ces instants postérieurs à t ; or la loi de la Mécanique n'impose pas la donnée de $\mathbf{v}(t)$ mais seulement celle de $\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(0)$; dans cette différence, les instants postérieurs à t disparaissent et il ne subsiste que l'intégrale $m[\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(0)] = \int_0^t \mathbf{F}_{\text{ext}} du$, conforme à la causalité. De la même façon, l'expression $m\mathbf{a}(t) = \int_0^\infty \mathbf{F}_{\text{ext}}(t + \tau u) \exp(-u) du$ semble non conforme à la causalité mais la prise en compte de la donnée de $\mathbf{a}(0)$ permet de réécrire l'accélération à l'instant t sous la forme $\mathbf{a}(t) = \exp\left(\frac{t}{\tau}\right) \mathbf{a}(0) - \frac{1}{m\tau} \int_0^t \mathbf{F}_{\text{ext}}(u) \exp\left(-\frac{u}{\tau}\right) du$ qui ne dépend que de données antérieures à l'instant t ; une fois prises en compte les conditions initiales, les instants supérieurs à t n'ont pas d'influence sur $\mathbf{a}(t)$.

□ 31- Les hypothèses de l'énoncé permettent d'écrire $\mathbf{F}_{\text{ext}}(t + \tau u) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \frac{d^n \mathbf{F}_{\text{ext}}(t)}{dt^n} \tau^n u^n$ donc

l'équation de DIRAC-PLASS prend la forme $m\mathbf{a}(t) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \frac{d^n \mathbf{F}_{\text{ext}}(t)}{dt^n} \tau^n \int_0^\infty u^n \exp(-u) du$ ou, au

regard de l'indication de l'énoncé,
$$m\mathbf{a}(t) = \sum_{n=0}^\infty \frac{d^n \mathbf{F}_{\text{ext}}(t)}{dt^n} \tau^n.$$

□ 32- On a ici affaire à une fonction qui n'est pas dérivable (sauf au sens des distributions !) en $t = 0$. L'intégrale demandée s'écrit alors d'une part $m \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \mathbf{a}(t) dt = m[\mathbf{v}(\varepsilon) - \mathbf{v}(-\varepsilon)] = \Delta \mathbf{P}$ et d'autre part $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \mathbf{F}_0 dt + \tau(\mathbf{F}_0 - \mathbf{0}) + \sum_{n=2}^\infty \tau^n \left(\frac{d^{n-1} \mathbf{F}_{\text{ext}}(\varepsilon)}{dt^{n-1}} - \frac{d^{n-1} \mathbf{F}_{\text{ext}}(-\varepsilon)}{dt^{n-1}} \right)$; comme \mathbf{F}_0 est finie et que les diverses dérivées de la force d'ordre supérieur ou égal à 1 sont nulles pour $t < 0$ et $t > 0$, on en déduit $\Delta \mathbf{P} = \tau \mathbf{F}_0$.

□ 33- Nous considérons maintenant que \mathbf{F}_{ext} garde la forme définie à la question précédente ; l'équation de DIRAC-PLASS a déjà été résolu à la question 25 pour $t < 0$ $\mathbf{a}(t < 0) = \frac{\mathbf{F}_0}{m} \exp\left(\frac{t}{\tau}\right)$; il reste à déterminer la solution pour $t > 0$ où on remarque alors que $t + \tau u$ est positif pour tout $u > 0$, ce qui permet d'écrire $\mathbf{a}(t > 0) = \frac{\mathbf{F}_0}{m} \int_0^\infty \exp(-u) du$ donc $\mathbf{a}(t > 0) = \frac{\mathbf{F}_0}{m}$.

La quantité de mouvement accumulée durant la phase de préaccélération peut alors s'écrire sous la forme $\int_{-\infty}^0 m \mathbf{a} dt = \mathbf{F}_0 \int_{-\infty}^0 \exp\left(\frac{t}{\tau}\right) dt = \tau \mathbf{F}_0$; on retrouve bien $\Delta \mathbf{P} = \tau \mathbf{F}_0$ comme ci-dessus.

La préaccélération ne correspond à rien d'autre qu'au résultat de l'application brusque d'une force extérieure discontinue, ce qui impose une accélération discontinue et une discontinuité de la quantité de mouvement.