Corrigé proposé par C. Vecchiato.

Mines-Ponts 2006 MP. Physique II.

"Redécouvrons la planète Neptune !"

I-1. Particule dans un champ gravitationnel

— 1. $3^{ème}$ loi de Kepler : "le rapport T^2/a^3 est le même pour toutes les planètes solaires".

• Ici on a un système isolé de 2 points (ou plutôt 2 astres sphériques ...). Dans le référentiel barycentrique, les centres des 2 astres ont des trajectoires circulaires centrées sur le barycentre du système (centre d'inertie). On note R la distance des centres des 2 astres, $\vec{v}$ leur vitesse relative : alors $\frac{\mu v^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2}$ où $\mu = \frac{Mm}{M+m}$ est la masse réduite du système ; $v = \left[\frac{G(M+m)}{R}\right]^{1/2}$ et $\boxed{T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi \; R^{3/2}}{\sqrt{G(M+m)}}}$.

→ En supposant $m \ll M$, le centre de l'astre de masse M est pratiquement fixe, et

$$C = \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM}.$$

• Si M désigne la masse M_S du Soleil, en prenant le cas de la Terre comme référence,

$C = 1\,(an)^2\,(UA)^{-3}$. (sinon, $C = \frac{M_S}{M}$ en $(an)^2\,(UA)^{-3}$)

— 2. Alors dans ce système d'unités, la valeur de G est $4\pi^2$.

— 3. Pour Uranus, $T_U = C^{1/2}(R_U)^{3/2} \simeq 84$ ans, $\Omega_U = 7{,}48.10^{-2}$ rad.an^{-1}

Pour Neptune, $T_N = C^{1/2}(R_N)^{3/2} \simeq 165$ ans, $\Omega_N = 3{,}81.10^{-2}$ rad.an^{-1}

$\Omega = \Omega_U - \Omega_N = 3{,}67.10^{-2}$ rad.an^{-1} qui est bien la valeur donnée dans l'énoncé

$r = \frac{\Omega_U}{\Omega} = 2{,}04 \# 2$ (on a presque un cas de "résonance gravitationnelle", cf question 15.)

— 4. (S doit désigner en toute rigueur le <u>centre du Soleil</u>). Alors le référentiel lié au repère $(S, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ n'est pas (tout à fait) galiléen car S n'est pas (exactement) le centre d'inertie du système solaire (tant qu'on ne néglige pas $\frac{m_{Jupiter}}{M_S}$, $\frac{m_{Saturne}}{M_S}$, $\frac{m_U}{M_S}$ et $\frac{m_N}{M_S}$).

<u>N.B.</u> : la distance du centre du Soleil au centre d'inertie du système solaire est au plus de 2 rayons solaires (en gros ; cas d'une conjonction totale des 4 planètes géantes). Le plus souvent, ce centre d'inertie est à l'intérieur du Soleil ... d'où la précision sur la définition du point S.

— 5. Le théorème de la résultante cinétique appliqué aux 3 astres dans R galiléen,

(en omettant l'action des planètes Jupiter et Saturne) s'écrit :

pour le Soleil : $M_S \dfrac{d^2\vec{r_S}}{dt^2} = -G M_S m_u \dfrac{\vec{US}}{US^3} - G M_S m_N \dfrac{\vec{NS}}{NS^3} = -G \dfrac{M_S m_u}{\|\vec{r_S}-\vec{r_U}\|^3}(\vec{r_S}-\vec{r_U}) - \dfrac{G M_S m_N}{\|\vec{r_S}-\vec{r_N}\|^3}(\vec{r_S}-\vec{r_N})$,

pour Uranus : $m_u \dfrac{d^2\vec{r_u}}{dt^2} = -\dfrac{G M_S m_u}{\|\vec{r_U}-\vec{r_S}\|^3}(\vec{r_U}-\vec{r_S}) - G\dfrac{m_u m_N}{\|\vec{r_U}-\vec{r_N}\|^3}(\vec{r_U}-\vec{r_N})$,

pour Neptune : $m_N \dfrac{d^2\vec{r_N}}{dt^2} = -\dfrac{G M_S m_N}{\|\vec{r_N}-\vec{r_S}\|^3}(\vec{r_N}-\vec{r_S}) - \dfrac{G m_N m_u}{\|\vec{r_N}-\vec{r_U}\|^3}(\vec{r_N}-\vec{r_u})$.

— 6. $\dfrac{d^2\vec{\rho_U}}{dt^2} = \dfrac{d^2\vec{r_u}}{dt^2} - \dfrac{d^2\vec{r_S}}{dt^2} = -G M_S \dfrac{\vec{\rho_u}}{\rho_u^3} - G m_N \dfrac{(\vec{\rho_u}-\vec{\rho_N})}{\|\vec{\rho_u}-\vec{\rho_N}\|^3} - G m_u \dfrac{\vec{\rho_u}}{\rho_u^3} - G m_N \dfrac{\vec{\rho_N}}{\rho_N^3}$

soit $\boxed{\dfrac{d^2\vec{\rho_u}}{dt^2} = -G(M_S+m_u)\dfrac{\vec{\rho_u}}{\rho_u^3} + \vec{f}}$.

— 7. Le mouvement non perturbé est circulaire uniforme de centre S, de rayon R_u

et de vitesse angulaire Ω_u ; on retrouve $\Omega_u^2 = \dfrac{G(M_S+m_u)}{R_u^3} \simeq \dfrac{G M_S}{R_u^3}$. (cf 1.)

I.2. Perturbation d'une orbite keplérienne

— 8. Orbite de classe I circulaire : $a^3\omega^2 = cte \Rightarrow 3\dfrac{\Delta a}{R} + 2\dfrac{\Delta\omega}{\omega}$ (en assimilant variations et différentielles) soit $\dfrac{\Delta\omega}{\omega} = -\dfrac{3}{2}\dfrac{\Delta a}{R}$ ou $\dot{v} = -\dfrac{3}{2}\omega\Delta a$ (= cte).

— 9. Orbite de classe II, $a = R$, $e \neq 0$: $a = R$ ne change pas donc T ne change pas.

• $\rho^2\dot{\phi} = (R+u)^2(\omega + \dfrac{\dot{v}}{R}) = R^2\omega(1+\dfrac{u}{R})^2(1+\dfrac{\dot{v}}{R\omega}) = cte$

en linéarisant $(1 + \dfrac{2u}{R} + \dfrac{\dot{v}}{R\omega}) = cte$ donc $\boxed{\dot{v} + 2\omega u = cte}$

→ Pour affirmer que $\dot{v} + 2\omega u = 0$, il faut supposer que la constante des aires est la même que pour le mouvement non perturbé (soit $R^2\omega$) ; on peut choisir le mouvement non perturbé de telle sorte qu'il en soit ainsi, mais ce n'est plus compatible avec $a = R$ et $e \neq 0$ car alors $p = a(1-e^2) = R$... Si l'on choisit $p = R$, a et T ne sont modifiés qu'au 2nd ordre en Δe. (voir question 19.)

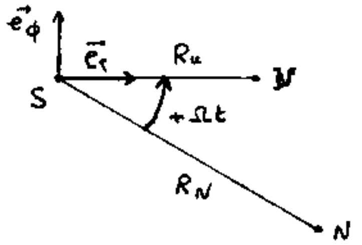
Mines-Ponts 2006 MP Phys II.

II Etude du "problème direct"

II.1. Perturbation au plus bas ordre

– 10. $\vec{f}$ est un terme correctif : on peut donc l'évaluer dans un premier temps avec les valeurs "non perturbées" de $\vec{\rho}_U$ et $\vec{\rho}_N$ (méthode d'itération).

Il faudra vérifier que $\|\vec{f}\| \ll \frac{GM_s}{R_u^2} \simeq \Omega_u^2 R_u$.

– 11. 

$(\Omega = \Omega_U - \Omega_N)$

$$\vec{\rho}_N{}^{(0)} = R_N \cos \Omega t \, \vec{e}_\rho - R_N \sin \Omega t \, \vec{e}_\phi$$

Alors $\vec{f} = G m_N \left\{ \frac{(R_N \cos \Omega t - R_u)\vec{e}_\rho - R_N \sin \Omega t \, \vec{e}_\phi}{[(R_N \cos \Omega t - R_u)^2 + R_N^2 \sin^2 \Omega t]^{3/2}} - \frac{(\cos \Omega t \, \vec{e}_\rho - \sin \Omega t \, \vec{e}_\phi)}{R_N^2} \right\}$

En posant $\varepsilon = \frac{G m_N}{R_N^2}$ et $k = \frac{R_u}{R_N}$, il vient effectivement :

$$\begin{cases} f_\rho = \varepsilon \left\{ \frac{(\cos \Omega t - k)}{[1 - 2k \cos \Omega t + k^2]^{3/2}} - \cos \Omega t \right\} \\ f_\phi = \varepsilon \left\{ \frac{-\sin \Omega t}{[1 - 2k \cos \Omega t + k^2]^{3/2}} + \sin \Omega t \right\} \end{cases}$$

→ Numériquement, on trouve bien $k = 0{,}638$ et $\varepsilon = 4\pi^2 \cdot \frac{(5{,}178 \cdot 10^{-5})}{(30{,}08)^2} = 2{,}26 \cdot 10^{-6}$ UA.(an)$^{-2}$.

– 12. Le graphe de la fig 3 montre que $\|\vec{f}\|$ n'excède pas $7\varepsilon \sim 1{,}5 \cdot 10^{-5}$ UA(an)$^{-2}$

Or $\frac{GM_s}{R_u^2} = \frac{4\pi^2}{(19{,}19)^2} \simeq 0{,}107$ UA(an)$^{-2}$: l'approximation qui consiste à considérer que $\vec{f}$ est un terme perturbatif est valide.

– 13. On revient à l'équation de la question 6 : $\frac{d^2\vec{\rho}_u}{dt^2} + G \frac{(M_s + m_u)}{\|\vec{\rho}_u\|^3} \vec{\rho}_u \simeq \vec{f}^{(0)}$.

• En utilisant les coordonnées polaires $\rho_U(t)$ et $\phi(t)$:

$$\frac{d^2\vec{\rho}_u}{dt^2} = (\ddot{\rho}_u - \rho_u \dot{\phi}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}_u \dot{\phi} + \rho_u \ddot{\phi})\vec{e}_\phi$$

$$= \left[\ddot{u} - (\rho_u^{(0)} + u)(\Omega_u + \frac{\dot{v}}{R_u})^2\right]\vec{e}_\rho + \left[2\dot{u}(\Omega_u + \frac{\dot{v}}{R_u}) + (\rho_u^{(0)} + u)\frac{\ddot{v}}{R_u}\right]\vec{e}_\phi$$

$$\simeq \left[\ddot{u} - \rho_u^{(0)}\Omega_u^2 - u\Omega_u^2 - 2\rho_u^{(0)}\Omega_u \frac{\dot{v}}{R_u}\right]\vec{e}_\rho + \left[2\dot{u}\Omega_u + \rho_u^{(0)}\frac{\ddot{v}}{R_u}\right]\vec{e}_\phi$$

en linéarisant par rapport à u, v et leurs dérivées.

– 13 (suite) :

Par ailleurs, $\dfrac{G(M_s+m_u)}{\rho_u^3}\vec{\rho}_u = \dfrac{G(M_s+m_u)}{[\rho_u^{(0)}+u]^2}\vec{e}_\rho \simeq \dfrac{G(M_s+m_u)}{(\rho_u^{(0)})^2}\left(1-\dfrac{2u}{\rho_u^{(0)}}\right)\vec{e}_\rho$

D'où $\underbrace{\left[\dfrac{G(M_s+m_u)}{\rho_u^{(0)2}} - \rho_u^{(0)}\Omega_u^2\right]}_{0 \text{ par hypothèse}} + \ddot{u} - \Omega_u^2 u - 2\rho_u^{(0)}\Omega_u\dfrac{\dot{v}}{R_u} - 2\underbrace{\dfrac{G(M_s+m_u)}{\rho_u^{(0)3}}}_{\Omega_u^2}u = \varepsilon F_\rho$

et $2\Omega_u\dot{u} + \rho_u^{(0)}\dfrac{\ddot{v}}{R_u} = \varepsilon F_\phi$.

En assimilant $\rho_u^{(0)}$ à R_u dans les termes en $\dot{v}$ et $\ddot{v}$, il vient effectivement :

$$\boxed{\begin{cases} \ddot{u} - 3\Omega_u^2 u(t) - 2\Omega_u\dot{v} = \varepsilon F_\rho \\ 2\Omega_u\dot{u} + \ddot{v} = \varepsilon F_\phi \end{cases}} \qquad [C-13]$$

II. 2. Etude de la solution forcée

– 14. • $F_\rho(t)$ et $F_\phi(t)$ sont manifestement périodiques de période $\frac{2\pi}{\Omega}$ et "régulières" ($k<1$) ; de plus, $F_\rho(t)$ est paire et $F_\phi(t)$ impaire, ce qui justifie les développements en série de cosinus et de sinus respectivement.

• Le système [C-13] est linéaire, ce qui justifie que $u(t)$ et $\dot{v}(t)$ sont également développables en série de Fourier, avec les mêmes pulsations $n\Omega$ (superposition). Tant qu'on s'en tient au régime forcé, il en est de même pour $v(t)$.

• La réversibilité du mouvement du système fait que si l'on change t en $-t$, $\rho_u(t)$ ne change pas, et $\phi(t)$ est changé en $-\phi(t)$: alors $\begin{cases} u(t) \text{ est paire} \rightarrow \text{série de cosinus} \\ v(t) \text{ est impaire} \rightarrow \text{série de sinus} \end{cases}$

($\dot{u}(t)$ est impaire, $\ddot{u}(t)$ est paire, $\dot{v}(t)$ est paire, $\ddot{v}(t)$ est impaire, ce qui est compatible avec les équations [C-13])

– 15. En utilisant le fait que la valeur moyenne des dérivées d'une fonction périodique est nulle, il vient $-3\Omega_u^2\varepsilon u_0 = \varepsilon\langle F_\rho\rangle = \varepsilon a_0$ d'où $u_0 = -\dfrac{a_0}{3\Omega_u^2}$

On a vu à la question 3 que 2Ω est proche de Ω_u : on a une quasi-résonance pour $n=2$, ce qui fait que les coefficients $|u_2|$ et $|v_2|$ sont nettement plus grands que les autres ($|u_0|$ exclu).

D'où l'approximation : $\begin{cases} u(t) \simeq \varepsilon u_0 + \varepsilon u_2\cos(2\Omega t) \\ v(t) \simeq \varepsilon v_2\sin(2\Omega t) \end{cases}$

– 16. Donc $\Delta\phi_N(t) \simeq \frac{\varepsilon \vartheta_2}{R_u}\sin(2\Omega t) = -\gamma \sin(2\Omega t)$

Avec $\gamma = -\frac{\varepsilon}{R_u}\left\{\frac{-4\Omega_u\Omega a_2 + (3\Omega_u^2+4\Omega^2)b_2}{4\Omega^2(\Omega_u^2-4\Omega^2)}\right\} = \frac{2{,}25.10^{-5}}{(19{,}19)} \cdot 3{,}8\,10^4 = 4{,}5.10^{-3}$ radian

soit $\underline{\gamma = 15' = 900''}$, on obtient une valeur compatible avec le tracé sinusoïdal du graphe de la fig.4 (la valeur de γ est donnée à la question 25…)

II-3. Étude de la solution complète : solution du système homogène

– 17 – En reportant $\dot{v} = 2\Omega_u(A-u)$ dans la première équation, on obtient :

$\ddot{u} + \Omega_u^2 = 4\Omega_u^2 A$ d'où $u = 4A + \alpha\sin(\Omega_u t) + \beta\cos(\Omega_u t)$, puis

$\dot{v} = 2\Omega_u(A-u) = -6\Omega_u A - 2\Omega_u\alpha\sin(\Omega_u t) - 2\Omega_u\beta\cos(\Omega_u t)$,

et par intégration : $v(t) = -6A\Omega_u t + 2\alpha\cos(\Omega_u t) - 2\beta\sin(\Omega_u t) + B$.

II.4. Retour sur les lois de Kepler

– 18 La solution de fréquence nulle correspond à une perturbation $u^{(0)}$ constante et on trouve bien $\dot{v}^{(0)} = -\frac{3}{2}\Omega_u u^{(0)} = -\frac{3}{2}\Omega_u \Delta R_u$: c'est bien le résultat de la question 8.

– 19. $a = \frac{\rho_{u\,min} + \rho_{u\,max}}{2} = R_u$ (à l'approximation linéaire) : a n'est pas changé,

T non plus (à l'approximation linéaire…), donc ρ_u oscille avec la pulsation Ω_u.

– 20. $A = 0$ dans ce cas et on retrouve bien le résultat de la question 9 : $\dot{v}^{(1)} = -2\Omega_u u^{(1)}(t)$.

II.6. Considérations numériques

– 21. Les petites variations de $\rho_u(t)$ ne sont pas aisées à mesurer, en revanche, $\phi - \Omega_u t$ peut être déduite de mesures de directions apparentes depuis la Terre.

– 22. En utilisant l'estimateur quadratique, on tient compte des M mesures

On minimise D_M^2 par rapport aux coefficients β_i ($\frac{\partial D_M^2}{\partial \beta_i} = 0$ en particulier).

On observe sur la fig 5 un bon accord entre l'ajustement et les points expérimentaux pour les années allant de 1700 à 1840. L'ordre de grandeur du domaine d'oscillation de $\Delta\phi_u(t)$ est de l'ordre de 200'' d'arc, nettement $< \gamma$.

– 23 (battements) $\Omega_b = \Omega_u - 2\Omega = 0{,}14.10^{-2}\,(\text{an})^{-1}$, donne $T_b = \frac{2\pi}{\Omega_b} \simeq 4500$ ans valeur compatible avec la fig.6 – Comme les mesures sur la trajectoire d'Uranus ont eu lieu pendant une durée $\ll T_b$, il est illusoire de distinguer Ω_u et 2Ω… (et en plus les données correspondent au voisinage d'un minimum d'amplitude d'oscillation !)

III Esquisse du problème inverse

- 24. $p^2\dot{\phi} = R_u^2 \Omega_u \Rightarrow p = R_u$ et $a = \dfrac{R_u}{1-e^2}$; au premier ordre en e,

on confond p, a et R_u. Alors $\dot{\phi} \approx \dfrac{\Omega_u}{(1-e\cos\phi)^2} \simeq \Omega_u(1+2e\cos\Omega_u t)$

$\phi(t) \simeq \Omega_u t + 2e\sin(\Omega_u t)$

- 25. Tant que l'on ne peut pas distinguer 2Ω et Ω_u, la correction due à Neptune est le même que celle qui correspondrait à une modification de l'excentricité (en l'absence d'autre planète).

- 26. Compte tenu de la valeur de γ, il faut que l'excentricité d'Uranus soit déterminée à mieux que 10^{-3} près... (pour Uranus, $e \simeq 0,047$).

- 27. Le seul paramètre qui intervient linéairement dans $\Delta\Phi_N(t)$ et qui provient de Neptune est γ... Connaissant γ, on accède à $\epsilon = \dfrac{G m_N}{R_N^2}$ (cf 15.) ; $\Omega_N = \Omega_u - \Omega$ permet de connaître R_N, d'où m_N.

- 28. Si l'on remplace $\Omega_N t$ par $\Omega_N t' = \Omega_N t + \pi$, $\sin(2\Omega t) = \sin[2(\Omega_u - \Omega_N)t]$ est inchangé... Il faudrait alors envisager le rôle de l'harmonique de rang 3 et du fondamental dans le développement de Fourier de $v(t)$, mais ils sont beaucoup plus faibles...