

Mines–Ponts, Physique 1 MP

Satellites de télécommunication

Concours 2007

1 Satellites sur orbite circulaire

□ 1. — La relation fondamentale de la dynamique en mouvement uniforme sur une orbite circulaire impose $G \frac{M_T M_S}{(R_T + h)^2} = M_S \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 (R_T + h)$ d'où la relation $\frac{T^2}{(R_T + h)^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$ (troisième loi de Kepler). La

vitesse du satellite est $v = \frac{2\pi(R_T + h)}{T}$ donc $v^2 = \frac{GM_T}{R_T + h}$.

□ 2. — $E_c = \frac{1}{2}M_S v^2$ et $E_p = -G \frac{M_T M_S}{R_T + h}$ en prenant l'origine des énergies potentielles à l'infini donc $2E_c + E_p = 0$.

□ 3. — La durée τ est proportionnelle à la longueur $2(R + h)\varphi$ de l'arc APB , soit $\tau = T \frac{\varphi}{2\pi}$. On a par ailleurs $\cos \varphi = \frac{R_T}{R_T + h}$ donc $\tau = \frac{(R_T + h)^{3/2}}{\sqrt{GM_T}} \arccos \frac{R_T}{R_T + h}$. Dans le cas de l'énoncé, l'application numérique fournit $\tau = 460$ s.

□ 4. — On a vu que $\frac{T}{\tau} = \frac{2\pi}{\arccos \frac{R_T}{R_T + h}} = 13,2$. Pour que la durée de visibilité totale soit égale à T , il faut

au moins 14 satellites par train. De plus, depuis chaque point de la surface solaire, un train de satellite ne couvre qu'une fraction $\frac{\varphi}{\pi} = \frac{1}{6,6}$ de l'arc de méridien. Pour couvrir tout ce méridien, il faut donc 7 trains de satellites. Finalement, la communication avec des satellites de basse altitude impose l'emploi de $7 \times 14 = 98$ satellites.

□ 5. — Pour un satellite géostationnaire, $T = T_0$ est égal à la durée du jour $T_0 = 86\,400$ s d'où on déduit

son altitude $h = \left(\frac{GM_T T_0^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} - R_T = 35\,900$ km. La durée de visibilité est alors infinie si chaque satellite est au-dessus d'un point fixe de l'équateur. Chaque satellite couvre alors une part importante de

la surface terrestre et le nombre de satellites nécessaires est limité (toutefois, en raison de leur orbite équatoriale, les satellites géostationnaires sont inutilisables pour la communication avec les régions polaires); par contre, le coût énergétique de leur mise en orbite est plus élevé.

□ 6. — Puisque $\alpha m v^2$ est une force, $m v^2$ étant une énergie (produit d'une force par une longueur), la grandeur α est inverse d'une longueur. On peut alors écrire le théorème de l'énergie mécanique sous la forme $\frac{dE}{dt} = -\alpha M_S v^3$ avec d'autre part $E = E_c + E_p = \frac{E_p}{2} = -G \frac{M_T M_S}{2(R_T + h)}$ car $E_c = -\frac{E_p}{2}$, ce qui impose aussi

$M_S v^2 = G \frac{M_T M_S}{R_T + h}$. Finalement, $\frac{d}{dt} \left(G \frac{M_T}{2(R_T + h)}\right) = \alpha \left(G \frac{M_T}{R_T + h}\right)^{3/2}$ ou $\frac{dh}{dt} = -2\alpha \sqrt{GM_T (R_T + h)}$.

□ 7. — Avec $\frac{dh}{dt} = -\frac{\Delta h}{T}$ et $T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM_T}} (R_T + h)^{3/2}$, on obtient $\alpha = \frac{\Delta h}{4\pi (R_T + h)^2} = 1,5 \times 10^{-15} \text{ m}^{-1}$. Avec

la même approximation, une valeur constante $\frac{dh}{dt} = -2\alpha \sqrt{GM_T (R_T + h)} = 1,65 \times 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, donc, en dix ans ($10 \times 365,25 \times 86\,400$ s ou $3,16 \times 10^8$ s) une chute de $\Delta' h = 52$ km. La solution exacte s'obtient par intégration de $(R_T + h)^{-1/2} dh = -2\alpha \sqrt{GM_T} dt$ ou $\sqrt{R_T + h} - \Delta'' h - \sqrt{R_T + h} = -\alpha \sqrt{GM_T} \Delta t$ d'où

une chute $\Delta''h = R_T + h - (\sqrt{R_T + h} - \alpha\sqrt{GM_T\Delta t})^2$ ou $\Delta''h = 14 \text{ km}$: la vitesse de descente ralentit progressivement mais l'ordre de grandeur de l'approximation restait raisonnable.

Au fur et à mesure de la descente, l'altitude diminue et la vitesse augmente donc mais l'augmentation d'énergie cinétique s'accompagne d'une diminution double de l'énergie potentielle ; l'énergie mécanique diminue donc et il n'y a pas de paradoxe.

□ 8. — Puisque $\alpha(h/2) = 2\alpha(h)$, on a $\beta = 1$. On en déduit $\gamma = h\alpha(h)$ soit $\gamma = 1,2 \times 10^{-9}$.

2 Stabilisation de l'altitude d'un satellite par gradient de gravité

2.1 Étude dynamique dans le référentiel mobile

□ 9. — $\mathbf{F}_1 = -G\frac{M_T m}{r_1^2}\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{F}_2 = -G\frac{M_T m}{r_2^2}\mathbf{u}_2$, en négligeant l'interaction gravitationnelle entre les deux parties du satellite (il s'agit de toutes façons de forces intérieures à un système rigide, qui n'interviennent dans aucune équation dynamique).

□ 10. — La force d'inertie d'entraînement $-m\mathbf{a}_e$ dépend de l'accélération absolue \mathbf{a}_e du point coïncidant, point fixe du référentiel mobile donc en mouvement de rotation circulaire uniforme à la vitesse angulaire Ω ; on a donc $\mathbf{F}_{e1} = m\Omega^2\mathbf{r}_1$ et $\mathbf{F}_{e2} = m\Omega^2\mathbf{r}_2$.

La force d'inertie de Coriolis $-m\mathbf{a}_c$ dépend de l'accélération complémentaire $\mathbf{a}_c = 2\Omega\mathbf{u}_z \wedge \mathbf{v}'$ avec pour vitesse relative $\mathbf{v}'_i = \dot{\theta}\mathbf{u}_z \wedge \mathbf{SM}_i$; on a donc $\mathbf{F}_{c1} = 2m\Omega\dot{\theta}\mathbf{SM}_1$ et $\mathbf{F}_{c2} = 2m\Omega\dot{\theta}\mathbf{SM}_2$ puisque le double produit vectoriel se simplifie avec $\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{SM}_1 = \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{SM}_2 = 0$.

□ 11. — Le moment des forces de Coriolis ne dépend pas du point de calcul car $\mathbf{F}_{c1} + \mathbf{F}_{c2} = \mathbf{0}$; calculé au point S , il fournit $\mathbf{M}_c = 2m\Omega\dot{\theta}(\mathbf{SM}_1 \wedge \mathbf{SM}_1 + \mathbf{SM}_2 \wedge \mathbf{SM}_2)$ soit un moment nul.

Les forces de gravitation et d'entraînement sur M_1 ont pour résultante $\mathbf{F}_1 = m\mathbf{u}_1\left(\Omega^2 r_1 - \frac{GM_0}{r_1^2}\right)$ avec pour distance $r_1^2 = (r_0\mathbf{u} + \ell\mathbf{u}_\theta)^2 \simeq r_0^2 + 2\ell r_0 \cos\theta$ donc $r_1 = r_0 + \ell \cos\theta$, à l'ordre le plus bas du développement. Il vient donc $\mathbf{F}_1 = m\mathbf{u}_1\left[\left(\Omega^2 r_0 - \frac{GM_T}{r_0^2}\right) + \ell \cos\theta\left(\Omega^2 + 2\frac{GM_T}{r_0^3}\right)\right]$ à cet ordre d'approximation et, par un calcul analogue, $\mathbf{F}_2 = m\mathbf{u}_2\left[\left(\Omega^2 r_0 - \frac{GM_T}{r_0^2}\right) - \ell \cos\theta\left(\Omega^2 + 2\frac{GM_T}{r_0^3}\right)\right]$. Dans ce référentiel (R'), le satellite est au repos si $\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0$ et $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$, ce qui définit Ω selon $\Omega^2 = \frac{GM_T}{r_0^3}$ (c'est en fait la troisième loi de Kepler retrouvée) ce qui permet de réécrire les résultantes des forces (on parle en ici en général de forces de marée) $\mathbf{F}_1 = 3\frac{GM_T m}{r_0^3}\mathbf{u}_1 \ell \cos\theta$, $\mathbf{F}_2 = -3\frac{GM_T m}{r_0^3}\mathbf{u}_2 \ell \cos\theta$ ou, à l'ordre le plus bas du même développement, $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 = 3\frac{GM_T m}{r_0^3}\ell \cos\theta\mathbf{u}$. Leur moment en S est donc celui d'un couple, $\mathbf{M} = -6\frac{GM_T m}{r_0^3}\ell^2 \cos\theta \sin\theta\mathbf{u}_z$

qui prend bien la forme $\mathbf{M} = -\Gamma_s\mathbf{u}_z$ avec $\Gamma_s = 6GmM_T\frac{\ell^2}{r_0^3}\sin\theta\cos\theta$. Ce moment est un moment de rappel (dirigé selon $-Oz$) qui provoque une rotation du satellite dans le plan de l'orbite le ramenant à sa disposition axiale $\theta = 0$.

□ 12. — Le moment cinétique barycentrique du système dans le référentiel mobile s'écrit $\sigma = \mu(2\ell) \times 2\ell\dot{\theta}$ (en projection sur \mathbf{u}_z) avec $\mu = \frac{m}{2}$ donc $\sigma = 2m\ell^2\dot{\theta}$; le théorème du moment cinétique dans (R') s'écrit

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\Gamma_s \quad \text{d'où l'équation différentielle du mouvement} \quad \ddot{\theta} = -\frac{3GM_T}{r_0^3}\sin\theta\cos\theta.$$

Les positions d'équilibre (associées à $\ddot{\theta} = 0$) correspondent à l'annulation du sinus ou du cosinus, donc à $\theta = 0$ ou π (physiquement équivalentes) et à $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ (également physiquement équivalentes).

□ 13. — Le développement au premier ordre de l'équation au voisinage de $\theta = 0$ mène à $\ddot{\theta} \simeq -\frac{3GM_T}{r_0^3}\theta$: c'est une équation caractéristique d'un oscillateur harmonique donc la position d'équilibre est stable. Si on pose $\theta_{\text{eq}} = \pm\frac{\pi}{2}$, l'équation différentielle pour θ voisin de θ_{eq} prend la forme $\ddot{\theta} \simeq +\frac{3GM_T}{r_0^3}(\theta - \theta_{\text{eq}})$: ce

sont donc des positions d'équilibre **instables**.

□ 14. — La période des oscillations est celle liée à l'équation $\ddot{\theta} \simeq -\frac{3GM_T}{r_0^3}\theta = -3\Omega^2\theta$; cette période est donc $T' = \frac{2\pi(R_T + h)^{3/2}}{\sqrt{3GM_T}} = 3,5 \times 10^3 \text{ s}$; on remarque aussi que $T' = \frac{T}{\sqrt{3}}$ où T est la période orbitale du satellite.

2.2 Étude énergétique dans le référentiel galiléen

□ 15. — L'énergie potentielle de gravitation $E_p = -GM_T m \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$ doit être développée à l'ordre deux; on doit donc utiliser les expressions $r_{1,2}^2 = r_0^2 \pm 2r_0\ell \cos \theta + \ell^2$ donc $\frac{1}{r_{1,2}} = \frac{1}{r_0} \pm \frac{\ell \cos \theta}{r_0^2} + \frac{\ell^2}{2r_0^3} (3 \cos^2 \theta - 1)$.

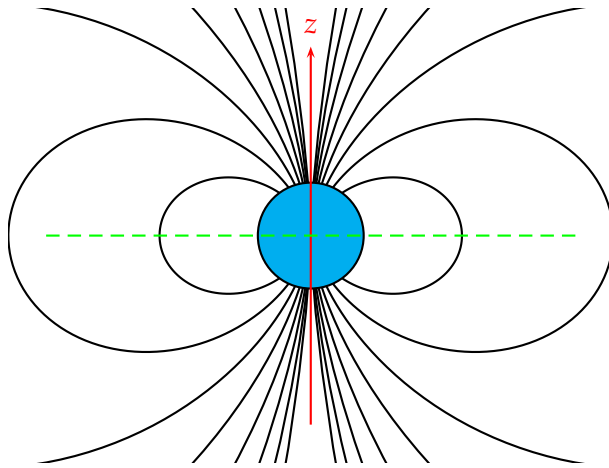
On en déduit donc $E_p = -GM_T m \left[\frac{2}{r_0} + \frac{\ell^2}{r_0^3} (3 \cos^2 \theta - 1) \right]$.

□ 16. — En l'absence de toute autre force dans ce référentiel galiléen, on écrira la conservation de l'énergie mécanique totale. Ici, l'énergie cinétique du système peut être évaluée à partir du théorème de König, $E_c = \frac{1}{2}M_S r_0^2 \Omega^2 + \frac{1}{2}\mu(2\ell\dot{\theta})^2$ soit $E_c = m r_0^2 \Omega^2 + m \ell^2 \dot{\theta}^2$. Il vient donc $E = m r_0^2 \Omega^2 + m \ell^2 \dot{\theta}^2 + E_p$. L'équation du mouvement devient alors $\dot{\theta}^2 - GM_T \frac{3}{r_0^3} \cos^2 \theta = \text{cte}$ ou, après dérivation, $\ddot{\theta} = -\frac{3GM_T}{r_0^3} \cos \theta \sin \theta$; pour la

période des petites oscillations, on retrouve bien $T = \frac{2\pi r_0^{3/2}}{\sqrt{3GM_T}}$ comme précédemment.

3 Effet dynamo

□ 17. — Les lignes du champ dipolaire sont classiques, d'équation polaire $\frac{dr}{2\cos\theta} = \frac{rd\theta}{\sin\theta}$ ou $r = r_0 \sin^2 \theta$; leur allure est reportée ci-dessous. Sur un cercle équatorial, le champ magnétique est **parallèle à Oz**, dirigé vers le nord (les lignes du champ magnétique sont dirigées du sud vers le nord). On écrira $\mathbf{B} = B\mathbf{u}_z$, $B > 0$.



□ 18. — $e_M = \int_{M_1}^{M_2} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$ donc $e_M = -v\ell B$ avec $v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T+h}}$; il vient donc $e_M = -\sqrt{\frac{GM_T}{R_T+h}} \ell B$.

Le signe $-$ signifie que la force électro-motrice est en fait dirigée de M_2 vers M_1 si le satellite tourne dans le sens direct du plan (Oxy) . On trouve $e_M = -2,24 \text{ V}$ pour $\ell = 10 \text{ m}$ et $e_M = -2,24 \times 10^3 \text{ V}$ pour $\ell = 10 \text{ km}$.

□ 19. — La force de Laplace $\mathbf{F}_L = I\mathbf{l} \wedge \mathbf{B}$ vaut ici $\mathbf{F}_L = -I\ell B\mathbf{u}_\theta$ ou, en norme, $F_L = I\ell B = 1,32 \times 10^{-4} \text{ N}$.

Cette force résistante a pour puissance $\mathcal{P}_L = -F_L v$ soit $\mathcal{P}_L = -I\ell B \sqrt{\frac{GM_T}{R_T+h}} = -0,98 \text{ W}$.

□ 20. — Avec une longueur de 10 km, la force est mille fois plus élevée mais la vitesse du satellite ne change pas ; on trouverait donc $\mathcal{P}_L = -980 \text{ W}$.

□ 21. — La force de Laplace freine le satellite et provoque sa **descente** (et l'augmentation de sa vitesse). On remarquera que $\alpha M_S v^2 \simeq 1,7 \times 10^{-5} \text{ N}$ pour un (gros) satellite de masse $2 \times 10^3 \text{ kg}$; le ralentissement dû à la force de Laplace sera alors prépondérant.

□ 22. — On peut provoquer, en contrôlant le sens du courant, une variation contrôlée de **l'altitude** du satellite. Pour monter sur une orbite plus haute, le courant doit circuler **de M_1 vers M_2** . Avec une puissance disponible de 500 W, l'augmentation d'énergie mécanique sera de l'ordre de $\mathcal{P} = \frac{\Delta E}{\Delta t}$ avec $E = -\frac{GM_T M_S}{2(R_T+h)}$

donc $\Delta E = \frac{GM_T M_S}{2(R_T+h)^2} \Delta h$; on en déduit $\Delta t = \frac{GM_T M_S \Delta h}{2(R_T+h)^2 \mathcal{P}} = 7,2 \times 10^3 \text{ s}$ (ou deux heures environ).

□ 23. — À partir d'une altitude plus faible, la durée nécessaire est légèrement plus grande, dans le rapport $\left(\frac{R_T+h}{R_T+h'}\right)^2$; ici, il faudra **12% de temps en plus** (soit $8,1 \times 10^3 \text{ s}$).

□ 24. — Le texte cité reprend le principe décrit ci-dessus ; on peut espérer atteindre des forces de même ordre de grandeur que les fusées de **contrôle d'altitude**, et seulement avec des câbles très longs.

4 Communications spatiales

□ 25. — Sur les charges négatives par exemple, $\mathbf{F} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \wedge \mathbf{B})$. L'équation de Maxwell-Faraday $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ impose $\mathbf{E} = \frac{\omega}{k} \mathbf{u}_z \wedge \mathbf{B}$ donc $E \simeq Bc$; on pourra donc affirmer $\|\mathbf{v}_e \wedge \mathbf{B}\| \leq v_e B = \frac{v_e}{c} E \ll \|\mathbf{E}\|$ dès lors que $v_e \ll c$ (électrons non relativistes) ; le résultat sera alors *a fortiori* vrai pour les charges positives, de masse plus élevée dont de vitesse plus faible.

On peut alors écrire la relation fondamentale $m_e \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = -e\mathbf{E}$ (en négligeant les termes d'accélération dus à l'extension spatiale du mouvement des électrons, celle-ci étant supposée très inférieure à la longueur d'onde) soit $\mathbf{v}_e = -\frac{e}{im_e \omega} \mathbf{E}$ et de même $\mathbf{v}_i = \frac{e}{iM_i \omega} \mathbf{E}$. Finalement, $\mathbf{j} = -nev_e + nev_i$ prend la forme

$$\mathbf{j} = \frac{ne^2}{i\omega} \left(\frac{1}{m_e} + \frac{1}{M_i} \right) \mathbf{E} \text{ ou, compte tenu du rapport des masses, } \mathbf{j} \simeq \frac{ne^2}{i\omega m_e} \mathbf{E}.$$

□ 26. — Dans ce modèle de plasma partout localement neutre, les équations de Maxwell prennent la forme $\text{div } \mathbf{E} = 0$, $\text{div } \mathbf{B} = 0$, $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ et $\text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{j}$. Dans le cadre du modèle de champ proposé, les deux premières relations sont automatiquement vérifiées et les deux suivantes deviennent équivalentes à $kE = \omega B$ et $kB = \frac{\omega}{c^2} E - \frac{\mu_0 ne^2}{m\omega} E$; on en déduit donc $k^2 E = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} E$, qui peut aussi s'écrire

sous forme d'une équation différentielle, $c^2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \omega_p^2 \mathbf{E}$. Finalement, l'équation de dispersion s'écrit

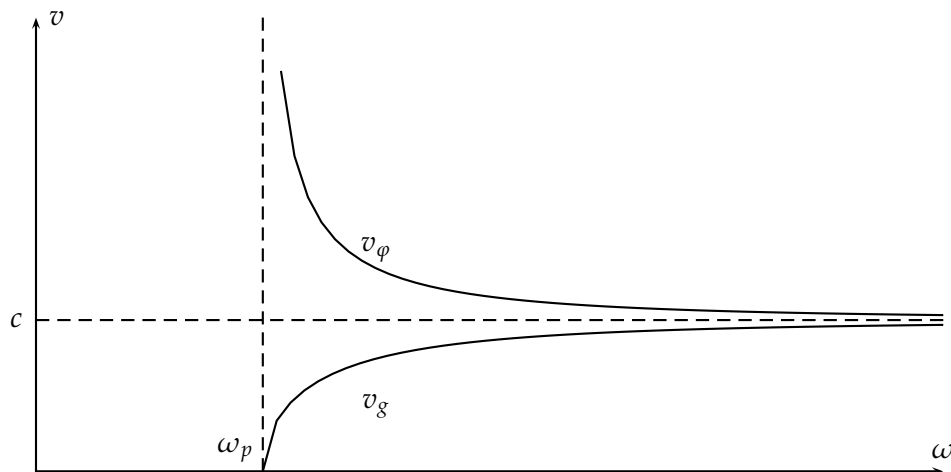
$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}.$$

□ 27. — La propagation n'est possible que si $k \in \mathbb{R}^*$ donc $k^2 > 0$ soit $\omega > \omega_p$; la ionosphère est donc un filtre passe-haut de fréquence de coupure $f_c = \frac{\omega_p}{2\pi}$.

□ 28. — L'équation de dispersion peut être écrite $k = \pm \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$ ou $\omega = \sqrt{\omega_p^2 + c^2 k^2}$. Les vitesses de

phase $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ et $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ prennent alors les expressions $v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$ et $v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$. Ces vitesses

dépendent de ω donc le milieu est **dispersif**. On remarque que $v_\varphi v_g = c^2$; les tracés correspondants sont proposés ci-dessous.



□ 29. — Pour le cuivre, on doit ici connaître un ordre de grandeur de la masse volumique ρ (en fait $\rho = 8,9 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) et de sa masse molaire \mathcal{M} (en fait $\mathcal{M} = 63,5 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$) et connaître la constante d'Avogadro $\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ pour évaluer $n_{\text{Cu}} = \frac{\mathcal{N}_A \rho}{\mathcal{M}} = 8,4 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$. On a bien sûr $n \ll n_{\text{Cu}}$ pour ce milieu très peu dense. La communication avec le satellite est possible pour $f > f_c = 1,27 \times 10^6 \text{ Hz}$ (on a utilisé $\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$).

□ 30. — La propagation à travers une hauteur $h = 200 \text{ km}$ de ionosphère à la vitesse $v_\varphi > c$ se traduit par une **avance** à la propagation (par rapport à une traversée de la même épaisseur de vide $\Delta t = \frac{h}{c} - \frac{h}{v_\varphi}$ soit $\Delta t = \frac{h}{c} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{f_c^2}{f^2}} \right]$; comme ici $f \gg f_c$, on peut se contenter d'une expression approchée au premier ordre, $\Delta t = \frac{h f_c^2}{2c f^2} = 5,4 \times 10^{-10} \text{ s}$. De nuit, la nouvelle fréquence de coupure f'_c vérifie $\frac{f'_c}{f_c} = \sqrt{\frac{n_1}{n_0}}$ et on obtient une nouvelle avance $\Delta' t = 2,7 \times 10^{-9} \text{ s}$.