

## ASCENSION ATMOSPHERIQUE EN MONTGOLFIERE

### I. — Atmosphère en équilibre.

#### I.A. — Atmosphère isotherme

□1 — la masse volumique de l'air  $\mu = \frac{M_e P}{RT_0}$

□2 — la condition d'équilibre statique de l'air  $-\frac{dP}{dz} = \mu g$ .

L'expression de la pression  $P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$   $H = \frac{RT_0}{M_e g}$

□3 —  $H = 8471m$  et  $z_{50\%}^{iso} = H \ln 2 = 5876m$

#### I.A. — Equilibre polytropique.

□4 — on a  $T(z) = T_0(1 - \alpha z)$ ,  $\mu(z) = \mu_0(1 - \alpha z)^{\beta-1}$  donc  $-\frac{dP}{dz} = \mu_0 g(1 - \alpha z)^{\beta-1}$  la solution est  $P(z) = P_0(1 - \alpha z)^\beta$

$\beta = \frac{1}{\alpha H} = \frac{z_0}{H}$

□5 —  $z_{50\%}^{pol} = \frac{1 - 2^{\frac{1}{\beta}}}{\alpha} = 5303m$   $\alpha = \frac{1}{z_0} = 3.10^{-5}$   $\beta = 3,89$

□6 —  $T = 288 - 8,6z \neq 288,14 - 6,94z$   $P = 1,01 \left(\frac{T}{288}\right)^{3,89} \neq 1,01 \left(\frac{T}{288,08}\right)^{5,26}$  résultat non compatible avec le modèle polytropique.

FIN DE LA PARTIE I

## II. Ascension de la montgolfière.

### II.A. — Equilibre de la montgolfière.

$$\square 7 \quad m_i = \mu_i V_0 = \frac{M_e P_i}{RT_i} V_0 = \frac{M_e P_e}{RT_i} V_0 \quad m_i = \frac{\mu_e T_e}{T_i} V_0$$

$$\square 8 \quad \text{on a } (m_i + m) \vec{g} - \mu_e V_0 \vec{g} = \vec{0} \Rightarrow \mu_e V_0 = (m_i + m) = \frac{m_i T_i}{T_e} \Rightarrow m = m_i \left( \frac{T_i}{T_e} - 1 \right)$$

$$\square 9 \quad \mu_e V_0 \vec{g} = m \vec{g} \Rightarrow m = \mu_e V_0 = \mu_0 V_0 (1 - \alpha z_m)^{\beta-1} \Rightarrow z_m = \frac{1}{\alpha} \left( 1 - \left( \frac{m}{\mu_0 V_0} \right)^{\frac{1}{\beta-1}} \right) \text{ avec } \mu_0 = 1,2 \text{ Kg.m}^{-3} \text{ et}$$

$$z_m = 12975,9 \text{ m}$$

$\square 10$  — au début du décollage  $\mu_e = \mu_0$  et  $T_e = T_0$  or la température  $T_i$  de décollage doit vérifier

$$\mu_0 V_0 > \left( \frac{\mu_0 T_0}{T_i} V_0 + m \right) \Rightarrow T_i > \frac{\mu_0 T_0 V_0}{\mu_0 V_0 - m} \text{ donc } \frac{m}{\mu_0 V_0} = \left( 1 - \frac{T_0}{T_d} \right)$$

$$\text{AN } T_d = 363,8 \text{ K.}$$

$$\square 11 \quad \text{les résultats de } \square 8 \text{, } \square 10 \text{ et } \square 7 \text{ donnent } P_e \left( \frac{1}{T_e} - \frac{1}{T_i} \right) = P_0 \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_d} \right) \quad (1) \Rightarrow \text{donc } \kappa_1 = P_0$$

$$\ln P_e + \ln \left( \frac{1}{T_e} - \frac{1}{T_i} \right) = \ln P_0 \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_d} \right) \Rightarrow \frac{\delta P_e}{P_e} + \frac{\left( -\frac{\delta T_e}{T_e^2} + \frac{\delta T_i}{T_i^2} \right)}{\left( \frac{1}{T_e} - \frac{1}{T_i} \right)} = 0 \Rightarrow \frac{\delta T_i}{T_i} = \frac{T_i}{T_e} \frac{\delta T_e}{T_e} - \left( \frac{T_i - 1}{T_e} \right) \frac{\delta P_e}{P_e} \quad [E_1]$$

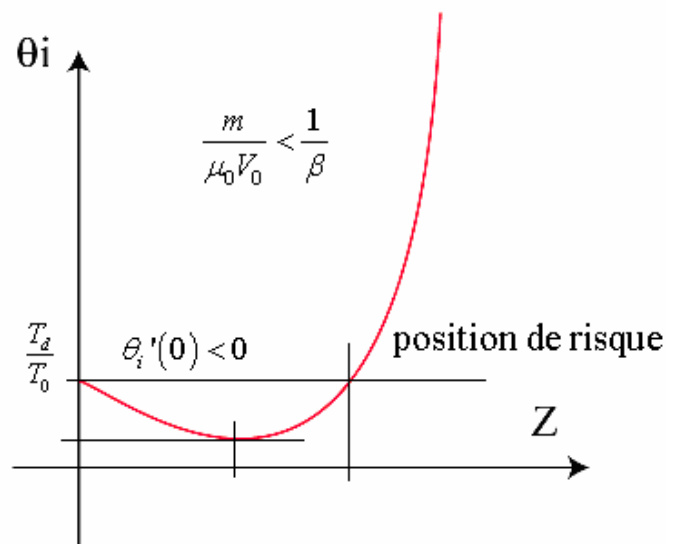
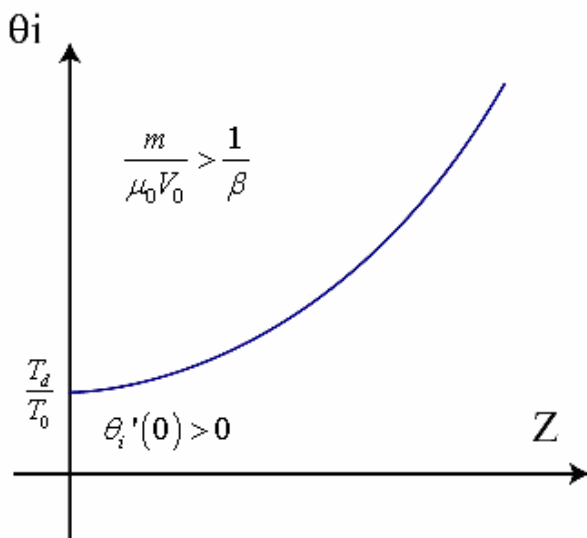
$\square 11$  — les résultats de  $\square 7$  et  $\square 8$  donne  $\frac{\mu_e T_e}{T_i} V_0 = \mu_e V_0 - m$  or  $\mu_e = \mu(z) = \mu_0 (1 - \alpha z)^{\beta-1} = \mu_0 (1 - Z)^{\beta-1}$  et

$$T_e = T(z) = T_0 (1 - \alpha z) = T_0 (1 - Z) \text{ donc } (1 - Z)^{\beta-1} = \frac{m}{\mu_0 V_0} + \frac{(1 - Z)^\beta}{\theta_i} \text{ avec } \theta_i(Z) = \frac{(1 - Z)^\beta}{(1 - Z)^{\beta-1} - (1 - Z_m)^{\beta-1}}$$

On a  $\theta_i(\infty) = \infty$ ,  $\theta_i(0) = \frac{1}{1 - (1 - Z_m)^{\beta-1}}$  et  $\theta_i(Z)$  est monotone

Si  $\frac{m}{\mu_0 V_0} > \frac{1}{\beta}$  alors  $\theta_i'(0) > 0$

Si  $\frac{m}{\mu_0 V_0} < \frac{1}{\beta}$  alors  $\theta_i'(0) < 0$



Si  $\frac{m}{\mu_0 V_0} < \frac{1}{\beta}$  : en phase de descente lorsqu'on atteint la position de risque  $\theta_i < \frac{T_d}{T_0}$ .

□13—  $\theta_i'(0) > 0 \Rightarrow V_0 < \frac{\beta m}{\mu_0}$  et  $V_{\max} = \frac{\beta m}{\mu_0} = 2083,33 m^3$

On a  $T_d = \frac{\mu_0 T_0 V_0}{\mu_0 V_0 - m} < T_{\max} \Rightarrow V_0 > \frac{m T_{\max}}{\mu_0 (T_{\max} - T_0)}$  donc  $V_{\min} = \frac{m T_{\max}}{\mu_0 (T_{\max} - T_0)} = 1828,43 m^3$

$$z_m^{\min} = \frac{1}{\alpha} \left( 1 - \left( \frac{m}{\mu_0 V_{\min}} \right)^{\frac{1}{\beta-1}} \right) = 12361 m$$

$$z_m^{\max} = \frac{1}{\alpha} \left( 1 - \left( \frac{m}{\mu_0 V_{\max}} \right)^{\frac{1}{\beta-1}} \right) = 13249 m$$

## II.A. — Ascension par apport thermique.

□14—  $\delta Q = n_i C_p dT_i^{(1)} = \frac{P_e V_0}{RT_i} C_p dT_i^{(1)}$  on a  $C_p = \frac{\gamma}{\gamma-1} R$  donc  $\frac{\delta T_i^{(1)}}{T_i} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\delta Q}{P_e V_0} > 0$

□15— on a  $n_i = \frac{P_e V_0}{RT_i} \Rightarrow \delta n_i = -\frac{P_e V_0 \delta T_i}{RT_i^2}$  et  $\delta m_i^{(1)} = M_e \delta n_i^{(1)}$  donne  $\delta m_i^{(1)} = -\frac{M_e \delta Q}{C_p T_i}$

□16— la loi de Laplace  $T_i^\gamma P_i^{1-\gamma} = Cte \Rightarrow \frac{\delta T_i^{(2)}}{T_i} = \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{\beta \alpha}{(1-\alpha z)} \delta z$

□17—  $\frac{\delta T_i^{(2)}}{T_i} = \beta \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{\delta T_e}{T_e} < 0$

□18—  $P_e = P_0 (1-\alpha z)^\beta = P_0 \left( \frac{T_e}{T_0} \right)^\beta \Rightarrow \ln P_e = \ln P_0 + \beta \ln \left( \frac{T_e}{T_0} \right)$  donc  $\frac{\delta P_e}{P_e} = \beta \frac{\delta T_e}{T_e}$

$$\frac{\delta T_i}{T_i} = \frac{T_i}{T_e} \frac{\delta T_e}{T_e} - \left( \frac{T_i}{T_e} - 1 \right) \frac{\delta P_e}{P_e} \Rightarrow \frac{\delta T_i}{T_i} \left( \frac{\beta}{\gamma} - (\beta - 1) \frac{T_i}{T_e} \right) = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\delta Q}{P_e V_0} \Rightarrow \kappa_2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma}$$

□19—

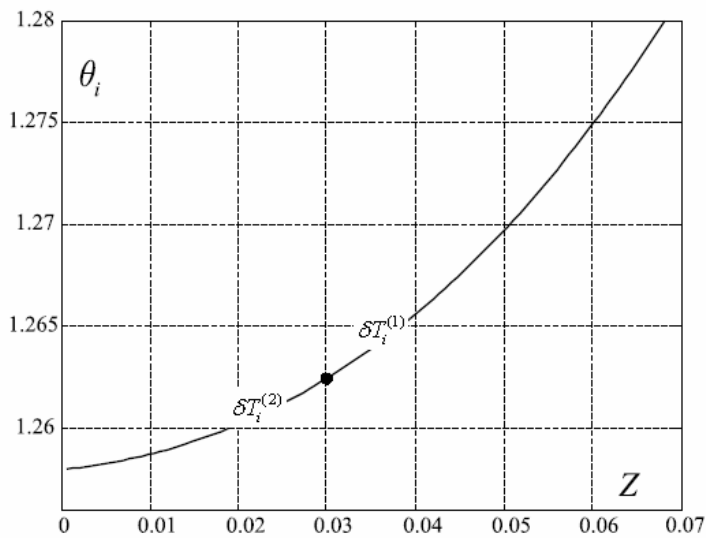


Figure 5 - Diagramme  $(\theta_i, Z)$

□20—  $n.Cv.\delta T_i = \delta n.Cv.(T_i - T_e)$  donne  $\frac{\delta T_i^{(3)}}{T_i} = \frac{\delta V}{V_0} \left( \frac{T_i}{T_e} - 1 \right) > 0$   $f(T_i/T_e) = \left( \frac{T_i}{T_e} - 1 \right)$

□21—  $\frac{\delta T_i}{T_i} = \left( \gamma + \frac{T_i}{T_e} (1 - \gamma) \right) \frac{\delta T_e}{T_e}$  et  $\frac{\delta T_e}{T_e} = \frac{\frac{\delta V}{V_0} \left( \frac{T_i}{T_e} - 1 \right)}{\left( \frac{\beta}{\gamma} + \frac{T_i}{T_e} (1 - \gamma) \right)}$

□22—

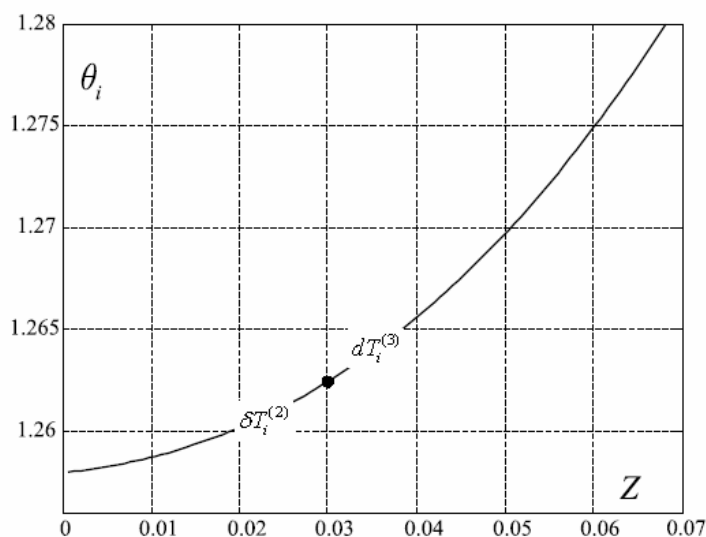


Figure 5 - Diagramme  $(\theta_i, Z)$

**FIN DE LA PARTIE II**

### III. —forme de l'enveloppe de la montgolfière.

□23— la hauteur du montgolfière n'est pas trop grand.

$$-\frac{dP}{dz} = \mu g \Rightarrow P = -\mu gz + Cte, \quad P_i = -\mu_i gz + P_e(0) \text{ et } P_e = -\mu_e gz + P_e(0) \text{ donc } \Delta P = (\mu_e - \mu_i) gz$$

□24— la condition d'équilibre :  $d\vec{K} = F(z+dz)\vec{i}(z+dz) - F(z)\vec{i}(z)$  donc  $dK \cdot \vec{n}(z) = \frac{d(F(z)\vec{i}(z))}{dz} dz$

$$\frac{dK}{dz} \vec{n}(z) = \frac{d[F(z)\vec{i}(z)]}{dz}$$

On multiplie par  $\vec{i} \Rightarrow F(z)$  est constant.  $\Rightarrow \frac{dK}{dz} \vec{n}(z) = F(z) \frac{d\vec{i}(z)}{dz}$

□25—  $dK = -\Delta P \cdot dS = -\Delta P \cdot \frac{2\pi r}{N} dl$  et  $d\vec{K} = -d\vec{K}'$

□26— on écrit  $\vec{i} = \cos \varphi \vec{e}_z + \sin \varphi \vec{e}_r \Rightarrow \frac{d\vec{i}}{dz} = \frac{d\vec{i}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dz} = \frac{d\varphi}{dz} \vec{n} \Rightarrow \frac{dK}{dz} = F(z) \frac{d\varphi}{dz}$

□27—  $\tan \varphi = \frac{dr}{dz}$  on dérive par rapport à  $z$ ,  $\frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{d^2 r}{dz^2} \Rightarrow \left(1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2\right) \frac{d\varphi}{dz} = \frac{d^2 r}{dz^2}$

$$\Rightarrow -\frac{1}{F} \left(1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2\right) \frac{\Delta P \cdot \frac{2\pi r}{N} dz}{dz} = \frac{d^2 r}{dz^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{F} \left(1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2\right) \frac{\Delta P \cdot \frac{2\pi r}{N} \sqrt{(dr^2 + dz^2)}}{dz} = \frac{d^2 r}{dz^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 r}{dz^2} = -\frac{2\pi(\mu_e - \mu_i)g}{NF} rz \left(1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow A = \frac{2\pi(\mu_e - \mu_i)g}{NF} \quad [A] = m^{-3}$$

□28—  $\frac{d^2 r}{dz^2} = -Arz \left(1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}$  on remplace  $r$  par  $A^k y$  et  $z$  par  $A^k x$ .  $\frac{d^2 y}{dx^2} = -A^{3k+1} xy \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}$  on pose

$$k = -\frac{1}{3}$$

□29— lorsque  $y'(0) < 1,1$  la montgolfière présente un sommet aigu et devient instable.

$y'(0) = 1,12$  la montgolfière est stable.

FIN DE L'EPREUVE

En novembre 1782, Joseph Montgolfier, papetier de son métier faisait sécher sa chemise en la tenant par le col fermé à la chaleur d'un feu de bois. Au mur de la pièce, un tableau représentant le rocher de Gibraltar était accroché. A cette époque, cette forteresse était réputée inexpugnable. La chemise gonflée d'air chaud s'éleva dans la pièce.



Joseph de Montgolfier

(1740-1810)