ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES.
ECOLES NATIONALES SUPERIEURES DE L'AERONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCEES, DES TELECOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT– ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TELECOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
´ECOLE POLYTECHNIQUE (FILIERE TSI)
CONCOURS D'ADMISSION 2009
PHYSIQUE I — MP

À PROPOS DE HEINRICH OLBERS

Corrigé de Mohamed Elabdallaoui
Professeur agrégé CPGE Marrakech

I. — La comète l3P/Olbers

I.A. — Mouvements cométaires

1—

$$\left.\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right|_{\Re} = \vec{\mathrm{M}}\left(\vec{F},O\right) = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{F} = r\vec{e}_r \wedge -\frac{dU}{dt}\vec{e}_r = \vec{0}$$

$\vec{L}_O = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} = Cste$ donc $\forall t$ $\overrightarrow{OM} \perp \vec{\mathrm{L}}_O$ et la trajectoire est plane. Plus précisément dans le plan $\perp$ à $\vec{\mathrm{L}}_O$ et passant par O.

2—

on a $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$, $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$ donc $\vec{\mathrm{L}}_O = mr\dot{\varphi}^2\vec{e}_z$ et $C = r\dot{\varphi}^2$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + mU \Rightarrow \boxed{\varepsilon = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{C^2}{r^2} + U\left(r\right)}$$

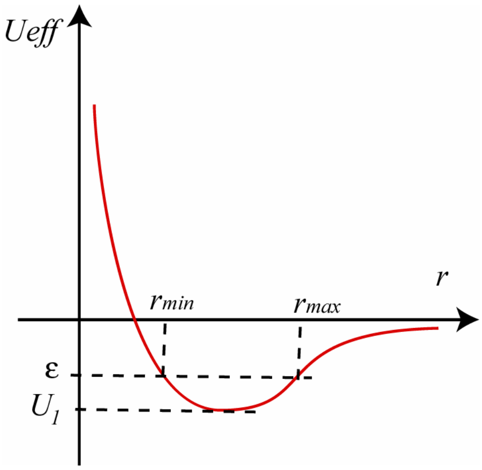
3—

on a $Ep\left(r\right) = -\frac{\mathscr{G}mM_\odot}{r}$ donc $U\left(r\right) = -\frac{\mathscr{G}M_\odot}{r}$ et $\boxed{K = \mathscr{G}M_\odot}$

4—

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{C^2}{r^2} + U\left(r\right) = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{C^2}{r^2} - \frac{K}{r} \Rightarrow \frac{1}{2}\dot{r}^2 = \varepsilon - \left[\frac{1}{2}\frac{C^2}{r^2} - \frac{K}{r}\right] = \varepsilon - U_{eff}$$

$U_{eff}\left(r\right) = \left[\frac{1}{2}\frac{C^2}{r^2} - \frac{K}{r}\right]$ on a $U'_{eff}\left(r\right) = \left[-\frac{C^2}{r^3} + \frac{K}{r^2}\right] = 0$ pour $r_0 = \frac{C^2}{K}$ et $U_1 = -\left[\frac{1}{2}\frac{K^2}{C^2}\right]$



Si $-\frac{1}{2}\frac{K^2}{C^2} < \varepsilon < 0$ le mouvement vérifie $r_{\min} \le r \le r_{\max} < \infty$ et $r_{\min} \ne r_{\max}$

5—

$\boxed{\varepsilon = -\frac{K}{r_{\min} + r_{\max}}}$ et $\boxed{\varepsilon = -\frac{K}{2a}}$

$C = \frac{L}{m} = r_{\min}.v(r_{\min}) = r_{\min}.\sqrt{\frac{K}{m}\left(\frac{2}{r_{\min}} - \frac{2}{r_{\min} + r_{\max}}\right)}$ $\boxed{C = \sqrt{K}.\sqrt{\frac{2r_{\min}r_{\max}}{r_{\min} + r_{\max}}}}$

$\boxed{C = \sqrt{Kp}}$

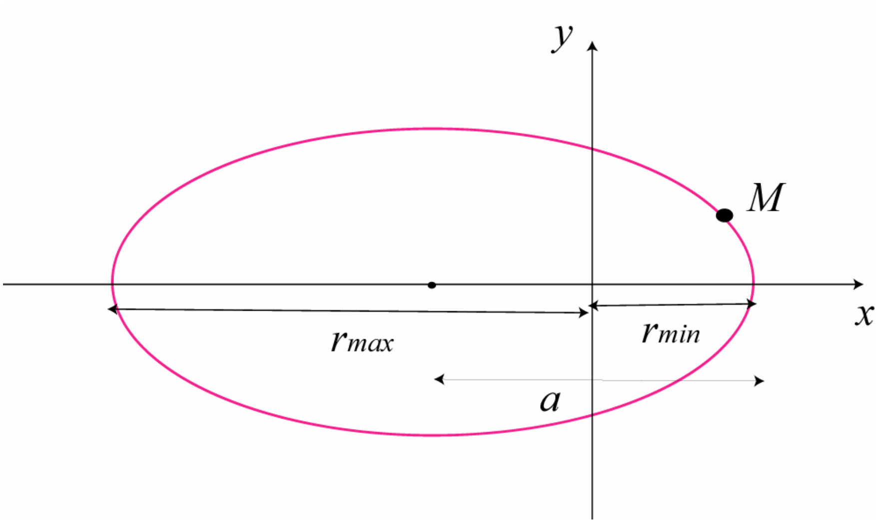
6—

la trajectoire est une ellipse

a Demi grand axe

p Paramètre de l'ellipse

e Excentricité



7—

à $t = 0$, $r = r_{\min}$ donc à $t > 0$ r ne peut qu'augmenter $\dot{r} > 0$.

On a $\dot{r}^2 = 2\varepsilon - \frac{C^2}{r^2} + \frac{2K}{r}$ et $C^2 = pK$ donc $dt = \sqrt{\frac{a}{K}} \frac{rdr}{\sqrt{-r^2 - \frac{a}{K}C^2 + 2ra}}$

Or $p = a(1-e^2)$

$$dt = \sqrt{\frac{a}{K}} \frac{rdr}{\sqrt{a^2e^2 - (r-a)^2}} \Rightarrow \boxed{\tau = \sqrt{\frac{a}{K}} \int_{r_{\min}}^{r(\varphi)} \frac{rdr}{\sqrt{a^2e^2 - (r-a)^2}}}$$

8—

on a $r = a(1 - e\cos\xi)$ et $dr = ae\sin\xi d\xi$

$$\tau = \sqrt{\frac{a}{K}} \int_{r_{\min}}^{r(\varphi)} \frac{rdr}{\sqrt{a^2e^2 - (r-a)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{a}{K}} \int_0^{\xi} \frac{a(1-e\cos\xi)\,\cancel{ae\sin\xi}\,d\xi}{\cancel{\sqrt{a^2e^2 - (a(1-e\cos\xi) - a)^2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{a}{K}} \int_0^{\xi} a(1-e\cos\xi)\,d\xi$$

$$\boxed{\tau = \sqrt{\frac{a^3}{K}} (\xi - e\sin\xi)}$$

La troisième loi de Kepler $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{K}$

$$\tau = \frac{T}{2\pi}(\xi - e\sin\xi)$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{K} = \frac{T_0^2}{a_0^3} \Rightarrow \boxed{T = T_0 \left(\frac{r_{\min}}{a_0(1-e)} \right)^{3/2}} \text{AN} \boxed{T = 69{,}2\,année}$$

9—

la comète reviendra à la date $\boxed{T = 69{,}2\,an}$

$$r = a(1 - e\cos\xi) \Rightarrow \xi_1 = \arccos \frac{1}{e}\left(1 - \frac{r(1-e)}{r_{\min}}\right) \Rightarrow \xi_1 = 125{,}7° = 2{,}2\,rad$$

$$\boxed{\tau_1 = \frac{T}{2\pi}\left(\arccos\left(1 - \frac{r(1-e)}{r_{\min}}\right) - e\sin\left(\arccos\left(1 - \frac{r(1-e)}{r_{\min}}\right)\right)\right)} \quad \boxed{\tau_1 = 15{,}9\,année}$$

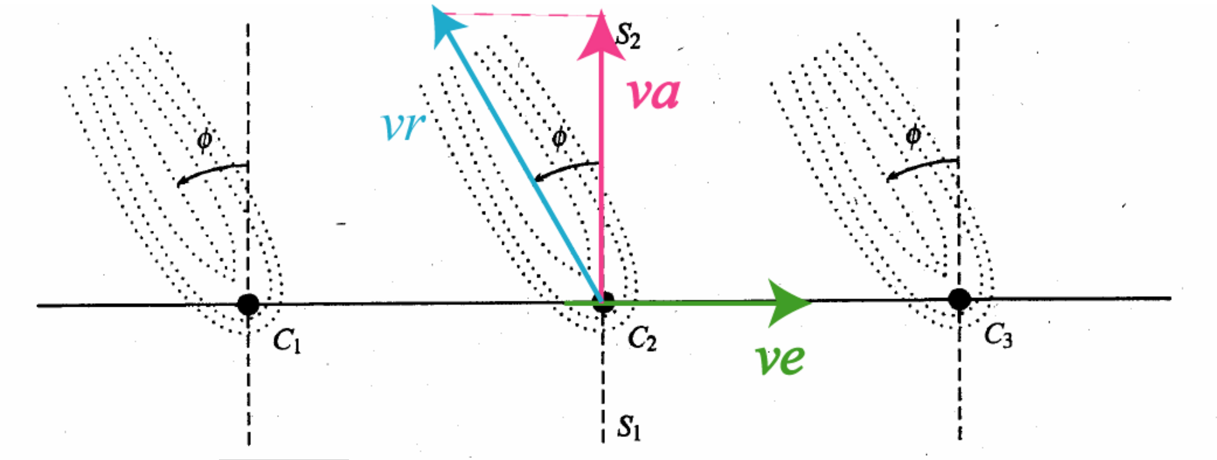
I.B, —La queue de la comète

10—

du coté S1 force répulsive

11—

$C_1 \to C_2 \to C_3$



$\tan\phi = \frac{ve}{va} = \frac{30}{400}$ $\boxed{\phi = 4,29°}$

II. — Le paradoxe d'Olbers

II.A. — Équilibre thermique et rayonnement

12— $\rho.\vec{G} = -\overrightarrow{grad}P$ donne $\frac{dP}{dz} = -\frac{mP}{kT}G$

13—

$G = \frac{dU}{dz}$ donne $\frac{dP}{dz} = -\frac{mP}{kT}.\frac{dU}{dz}$ après intégration $P = P_0 \exp-\left(\frac{E}{kT}\right)$

Or $n = \frac{N}{V} = \frac{PNa}{RT}$ d'où $n = n_0 \exp-\left(\frac{E}{kT}\right)$

14—

$u_\nu : \left[J.m^{-3}.s\right]$ $\quad A\left[s^{-1}\right]$ $\quad B\left[J^{-1}.m^3.s^{-2}\right]$ $\quad C\left[J^{-1}.m^3.s^{-2}\right]$

15—

On a $n_1 = n_{10}\exp-\left(\frac{E_1}{kT}\right)$ et $n_2 = n_{20}\exp-\left(\frac{E_2}{kT}\right)$ or $\lim_{T\to\infty} n_1 = \lim_{T\to\infty} n_2 = n_{20} = n_{10} = n_0$

A l'équilibre $\boxed{\frac{n_2}{n_1} = \frac{Bu_\nu}{A+Cu_\nu} = \exp-\left(\frac{E_2-E_1}{kT}\right) = \exp-\frac{h\nu}{kT}}$ donc $u_\nu = \frac{A}{B}\left[\exp\frac{h\nu}{kT} - \frac{C}{B}\right]^{-1}$

$\boxed{F(\upsilon) = \frac{A}{B}}$ et $\boxed{H(\upsilon) = \frac{C}{B}}$

II.B. - Loi de Ptanck

16—

$\boxed{\frac{C}{B} = 1}$ $\quad \boxed{\frac{A}{B} = \frac{8\pi h\upsilon^3}{c^3}}$

17—

$j = \int_0^\infty j_\upsilon d\upsilon = \int_0^\infty \frac{2\pi h\upsilon^3}{c^2}\frac{1}{\left[\exp\frac{h\upsilon}{kT} - 1\right]}d\upsilon$ on pose $\frac{h\upsilon}{kT} = x$ donc

$j = \int_0^\infty j_\upsilon d\upsilon = \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3}\int_0^\infty \frac{x^3}{[\exp x - 1]}dx = \frac{2\pi k^4}{c^2 h^3} I.T^4$ $\quad \boxed{\Psi = 4}$ $\quad \boxed{\sigma = \frac{2\pi k^4}{c^2 h^3} I}$

18—

$$I=\int_0^\infty x^3\left[e^x-1\right]^{-1}dx$$
$$=\int_0^\infty x^3e^{-x}\left[1-e^{-x}\right]^{-1}dx$$
$$=\int_0^\infty x^3\exp^{-x}\sum_{n=0}^\infty e^{-nx}dx$$
$$=\sum_{n=0}^\infty\int_0^\infty x^3\exp^{-x(1+n)}dx$$

On pose $x(1+n)=t$

$I=\sum_{n=0}^\infty\int_0^\infty\frac{1}{(1+n)^4}t^3\exp^{-t}dt=\sum_0^\infty\frac{1}{(1+n)^4}.\int_0^\infty t^3\exp^{-t}dt=\sum_1^\infty\frac{1}{(n)^4}.\int_0^\infty t^3\exp^{-t}dt$ en fin $\boxed{I=\zeta(4).\Gamma(4)}$

$$I=\frac{6\pi^4}{90}=\frac{\pi^4}{15}$$

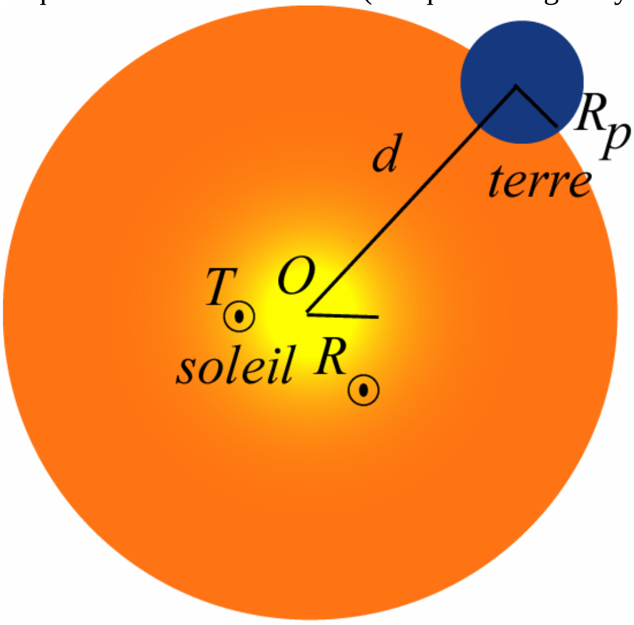
$\boxed{\sigma=\frac{2\pi^5k^4}{15c^2h^3}}$ AN $\boxed{\sigma=5,67.10^{-8}Wm^{-2}K^{-4}}$

II.C. — Le ciel est clair, le jour. ..

19—

Le Bilan Radiatif

La puissance émise est égale à la puissance reçue, le bilan radiatif d'une planète
un schéma très simplifié du bilan énergétique d'une planète sans atmosphère en considérant que l'équilibre radiatif est atteint (i.e. que l'énergie rayonnée est égale à l'énergie reçue).



la puissance totale émise par le Soleil.

$\sigma T_{\odot}^4.4\pi R_{\odot}^2 = 4{,}18.10^{26} W = 418 YottaWatts$

Cette puissance étant émise à la surface d'une sphère, ellle va se propager sous forme de sphère de plus en plus grande. A la distance Terre-Soleil d, cette puissance totale sera donc distribuée sur une sphère de rayon d. La valeur de cette puissance pour chaque mètre carré de la surface de cette sphère de rayon d sera donc :

la puissance par unité de surface (donc en W.m-2) reçue

$$P = \frac{\sigma T_{\odot}^4.4\pi R_{\odot}^2}{4\pi d^2} = 1477{,}62 Wm^{-2}$$

Or on a supposé que La terre présente toujours la même face donc la puissance absorbée e par unité de surface par cette face est $P = 1477{,}62 Wm^{-2}$ (on divise pas par 4 comme dans cours)

Le Bilan Radiatif

La puissance émise est égale à la puissance reçue, le bilan radiatif d'une planète

$P = 1477{,}62 = \sigma T_e^4$ donc $T_e = 401{,}79 K$

La température de la face non éclairée $T_{ne} = 0$

20—

le bilan radiatif local $P 2\pi R_p^2 \cos\theta \sin\theta d\theta = \sigma T^4 2\pi R_p^2 \sin\theta d\theta$ donc $\boxed{T(\theta) = T_{\odot}\sqrt{\frac{R_{\odot}}{d}}\left(|\cos\theta|\right)^{1/4}}$

$$\begin{aligned}
\bar{T} &= \frac{1}{S}\iint T(\theta)\, dS \\
&= \frac{1}{4\pi R_p^2}\int_0^{\pi} T_{\odot}\sqrt{\frac{R_{\odot}}{d}}\left(|\cos\theta|\right)^{1/4} 2\pi R_p^2 \sin\theta d\theta \\
&= \frac{1}{2}T_{\odot}\sqrt{\frac{R_{\odot}}{d}}\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^{1/4}\sin\theta d\theta + \frac{1}{2}T_{\odot}\sqrt{\frac{R_{\odot}}{d}}\int_{\pi/2}^{\pi}(-\cos\theta)^{1/4}\sin\theta d\theta \\
&= -\frac{4}{5}T_{\odot}\sqrt{\frac{R_{\odot}}{d}}(\cos\theta)^{5/4}\Big|_0^{\pi/2}
\end{aligned}$$

$\boxed{\bar{T} = \frac{4}{5}T_{\odot}\sqrt{\frac{R_{\odot}}{d}}}$ $\boxed{\bar{T} = 322{,}44 K}$

21—

la températaure moyenne à la surface de la terre est 15°C=288K

$\bar{T}$ >288 ce qui est normal vue qu'on négligé l'effet de l'absorption de l'énergie par l'atmosphère, le transfert latéral au niveau des faces de la terre, la rotation de la terre ,…… !

22—

loi de FOURIER

$\vec{j} = -\lambda \overrightarrow{grad} T$

Le bilan thermique (cours) donne $\Delta T + P_p = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0$

$$\Delta T = \frac{1}{R_p^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)$$

P_p L'énergie produite au sein de la planète

$$P_p = \sigma\left(T_\odot^4 \frac{R_\odot^2}{d^2}\left|\cos\theta\right|\right) - \sigma T^4$$

23—

$$dN = n_\odot .4\pi r^2 dr$$

$$dP = \frac{\sigma T_\odot^4 dN}{4\pi r^2} = \sigma T_\odot^4 .2\pi r^2 .n_\odot .4\pi r^2 dr \quad P = \sigma T_\odot^4 .\frac{16}{3}\pi^2 R_p^2 .n_\odot .\left(R_\infty^3 - r_0^3\right)$$

24—

instabilité gravitationnelle ''forces attractives''

25—

$$j_\upsilon(\upsilon,T) = \frac{2\pi h\upsilon^3}{c^2}\frac{1}{\left[\exp\frac{h\upsilon}{kT}-1\right]} \Rightarrow j_\lambda(\lambda,T) = \frac{2\pi hc}{\lambda^3}\frac{1}{\left[\exp\frac{hc}{kT\lambda}-1\right]}$$

$$\frac{\partial j_\lambda(\lambda,T)}{\partial\lambda} = -6\pi hc\lambda^{-4}\frac{1}{\left[\exp\frac{hc}{kT\lambda}-1\right]} + 2\pi hc\lambda^{-3}\frac{\frac{hc}{kT\lambda^2}}{\left[\exp\frac{hc}{kT\lambda}-1\right]^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial j_\lambda(\lambda,T)}{\partial\lambda} = -6\pi hc\lambda^{-4}\frac{1}{\left[\exp\frac{hc}{kT\lambda}-1\right]} + 2\pi hc\lambda^{-3}\frac{\frac{hc}{kT\lambda^2}\exp\frac{hc}{kT\lambda}}{\left[\exp\frac{hc}{kT\lambda}-1\right]^2}$$

$$\frac{\partial j_\lambda(\lambda,T)}{\partial\lambda} = \frac{-6\pi hc\lambda^{-4}\left[\exp\frac{hc}{kT\lambda}-1\right] + 2\pi hc\frac{hc}{kT\lambda^2}\lambda^{-3}\exp\frac{hc}{kT\lambda}}{\left[\exp\frac{hc}{kT\lambda}-1\right]^2}$$

$$= \exp\frac{hc}{kT\lambda}\frac{\left(-3+\frac{hc}{kT\lambda}\right)+3\exp-\frac{hc}{kT\lambda}}{\left[\exp\frac{hc}{kT\lambda}-1\right]^2}$$

On pose $x = \frac{hc}{kT\lambda}$ et $\frac{\partial j_\lambda(\lambda,T)}{\partial\lambda} = 0 \Rightarrow (3-x) = 3e^{-x}$

$x^* = \frac{hc}{kT\lambda_m} \Rightarrow \lambda_m = \frac{hc}{kx^*T}$ et $\boxed{\mu = \frac{hc}{kx^*}}$ loi de déplacement de Wien $\boxed{\mu = 2,9.10^{-3}\,Km}$

26—

$\lambda_m = \frac{\mu}{T_a} = \lambda_\odot\left(1+\frac{V}{c}\right) = \lambda_\odot\left(1+\frac{H_0 .r}{c}\right)$ donc $\boxed{T_a = \frac{\mu}{\lambda_\odot\left(1+\frac{H_0 .r}{c}\right)}}$

AN $\boxed{T_a = \dfrac{T_\odot}{\left(1+\dfrac{H_0.r}{c}\right)} = 3206{,}5k}$

Les étoiles de classe G sont les mieux connues, pour la seule raison que notre Soleil est de cette classe, (la température de surface de 5 000 à 6 000 K) alpha Centauri A est une étoile G.
Classe K Les étoiles de classe K sont des étoiles de couleur orange, légèrement moins chaudes que le Soleil (température de surface : 4 000 K) C'est le cas de l'étoile étudiée dans cette question.

27—

On a $n_\odot R_\odot^3 = 4{,}2.10^{-31} \ll 1$

$j_\odot = \sigma T^4 \Rightarrow T = 364{,}4K$

$T_a = \dfrac{T_\odot}{\left(1+\dfrac{H_0.r}{c}\right)} = 364{,}4k$ donne $r = \dfrac{c}{H_0}\left(\dfrac{T_\odot}{364{,}4} - 1\right) = 188$ milliards d'années lumières. Donc ces étoiles sont trop loin et la lumière émise ne nous est pas encore parvenue.

28—

On a $V = H_0.r < c$ donc $r < \dfrac{c}{H_0}$ et $R_{th} = \dfrac{c}{H_0} = 12.10^{26}m$

29—

$\boxed{\lambda_a = \dfrac{\mu}{T_a} = 1{,}07mm}$

La longueur d'onde des Micro ondes
Sa découverte, a été l'œuvre de deux ingénieurs, Arno Allan Penzias et Robert Woodrow Wilson, en 1965.

Heinrich Olbers, médecin et astronome

FIN