

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L' AÉRONAUTIQUE ET DE L' ESPACE
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIERE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION

SECONDE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Filière PC

(Durée de l'épreuve : 4 heures ; l'usage de la calculatrice est autorisé)

Sujet mis à disposition des concours : Cycle international, ENSTIM, INT, TPE-EIVP

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
Physique II – Filière PC

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PC, comporte 5 pages.

- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
- Il ne faudra pas hésiter à formuler tout commentaire qui vous semblera pertinent, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.
- Convention typographique : un vecteur est noté en gras, par exemple \mathbf{A} , sa norme en italique ($A = \|\mathbf{A}\|$) ; le vecteur unitaire pour la coordonnée a est noté \mathbf{u}_a .

PRODUCTION ET STOCKAGE D'HOLOGRAMMES

L'addition cohérente de deux ondes optiques produit une figure d'interférence, dont l'enregistrement est nommé *hologramme*. L'holographie consiste en l'étude de la production et de l'utilisation d'hologrammes ; elle diffère de l'étude classique d'interférences par la complexité des ondes qui interfèrent et celle du dispositif expérimental. Convenablement éclairé, hologramme peut produire l'image tridimensionnelle d'un objet. L'utilisation d'hologrammes est largement répandue à des fins publicitaires, éducatives, techniques ou artistiques.

Les deux parties de ce problème sont largement indépendantes entre elles ; la partie I, proche du cours dans son ensemble concerne la production et la restitution d'un certain type d'hologrammes, dits *minces*, la partie II s'intéresse à une méthode thermo-optique d'enregistrement d'hologramme.

Partie I : Hologrammes minces

Pour former l'hologramme d'un objet, on utilise (fig. 1) une onde lumineuse plane monochromatique, de pulsation ω , de longueur d'onde $\lambda_{\text{réf}}$, que l'on sépare en deux faisceaux. L'un des faisceaux sert d'onde de référence ; l'autre faisceau éclaire un objet, et subit réflexion, réfraction et diffusion. L'hologramme est formé en faisant interférer l'onde de référence avec l'onde issue de l'objet ; on obtient une onde non plane, de pulsation ω ,

caractéristique de l'objet ; la figure d'interférence est enregistrée sur une couche photosensible (P) qui constitue l'hologramme.

On note $g(M, t) = A_{obj}(M) \exp[i(\omega t - \mathbf{y}(M))]$ l'onde issue de l'objet. Dans le trièdre orthonormé $Oxyz$, l'onde de référence d'amplitude $A_{réf}$ de phase nulle au point O et à l'instant $t = 0$ est caractérisée par son vecteur d'onde $\mathbf{k}_{réf} = k_{réf} (\mathbf{u}_x \sin \mathbf{j} + \mathbf{u}_z \cos \mathbf{j})$. On la note $A_{réf} \exp[i(\omega t - \mathbf{k}_{réf} \cdot \mathbf{OM})]$ et l'on suppose, dans tout le problème, l'amplitude $A_{réf}$ de l'onde de référence très supérieure à celle de l'onde issue de l'objet : $\mathbf{e} = \frac{A_{obj}}{A_{réf}}$, $|\mathbf{e}| \ll 1$. L'intensité

$I(M)$ au point M d'une onde d'amplitude complexe $s(M, t)$ sera conventionnellement définie par $I(M) = s(M, t) s^*(M, t) = |s(M, t)|^2$.

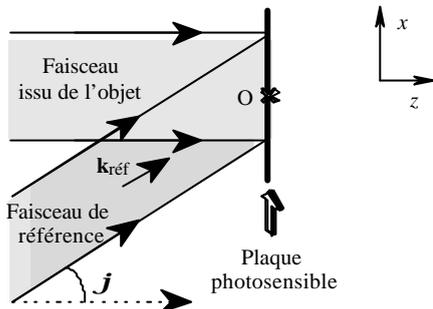


Fig. 1 Enregistrement d'un hologramme mince

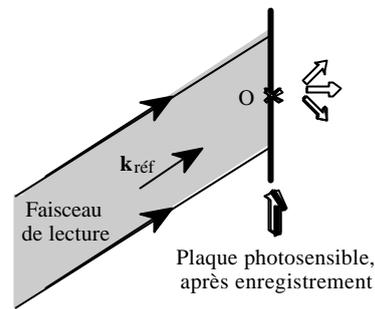


Fig. 2 Lecture en transmission d'un hologramme mince

□ 1 – Établir l'expression suivante de l'intensité lumineuse $I(M)$ au point M :

$$I(M) = I_{obj}(M) + I_{réf} + 2A_{obj}(M)A_{réf} \cos[\mathbf{y}(M) - \mathbf{k}_{réf} \cdot \mathbf{OM}]$$

□ 2 – La couche photosensible (P) est une plaque photographique rectangulaire, d'épaisseur négligeable, placée dans le plan Oxy . Après développement, le coefficient de transmission en amplitude (ou *transparence*) $t(x, y, 0)$ de cette plaque en un point M de coordonnées $(x, y, 0)$ ne dépend que du temps de pose et de l'intensité lumineuse I en M

au moment de l'exposition, selon la loi $t = t_0 \left(\frac{I}{I_0} \right)^{-\frac{g}{2}}$, où g est un coefficient positif et

$I_0 = I_{réf} = A_{réf}^2$. Montrer que, en se limitant aux termes du premier ordre en $\mathbf{e} = \frac{A_{obj}}{A_{réf}}$,

$$t(x, y, 0) = t_0 \left\{ 1 - g \frac{A_{obj}(M)}{A_{réf}} \cos[\mathbf{y}(x, y, 0) - k_0 x \sin(\mathbf{j})] \right\}.$$

□ 3 – Après développement, la plaque est replacée dans la position qu'elle avait lors de l'impression (Fig. 2) puis éclairée par une onde de lecture identique à l'onde de référence. Montrer que l'amplitude de l'onde transmise par la plaque holographique se compose de trois termes dont l'un est, à un coefficient multiplicatif près, identique à l'onde issue de l'objet. On présentera chacun de ces termes sous la forme $A_n \exp[i(\omega t - \mathbf{j}_n)]$, en explicitant A_n et \mathbf{j}_n , avec $n \in \{1, 2, 3\}$.

□ 4 – L'onde obtenue en transmission résulte de la diffraction de l'onde de lecture par l'hologramme. Il est possible ainsi de reconstituer l'onde issue d'un objet éclairé par une

lumière cohérente. On suppose dans tout le problème que l'objet dont on forme l'hologramme est ponctuel et situé à l'infini sur l'axe Oz ; il génère alors une onde plane de vecteur d'onde $\mathbf{k}_{obj} = k_{réf} \mathbf{u}_z$, en phase avec l'onde de référence au point O. La phase de cette onde plane est maintenant explicite : $\mathbf{y}(x, y, z) = \mathbf{k}_{obj} \cdot \mathbf{OM}$. Établir dans ces conditions l'expression approchée suivante de l'intensité :

$$I(\mathbf{M}) = I_0 \left[1 + m \cos(\mathbf{OM} \cdot \Delta \mathbf{k}) \right], \quad [1]$$

où $\Delta \mathbf{k} = \mathbf{k}_{obj} - \mathbf{k}_{réf}$. Exprimer m en fonction de $A_{réf}$ et A_{obj} . Caractériser les surfaces d'intensité maximale et exprimer la distance entre deux de ces surfaces successives en fonction de la norme du vecteur \mathbf{k} puis en fonction de la longueur d'onde $\lambda_{réf}$ et de \mathbf{j} .

□ 5 – La plaque photographique permet d'enregistrer au plus N traits par unité de longueur. À quelle condition sur N , $\lambda_{réf}$ et \mathbf{j} la photographie sera-t-elle une reproduction acceptable de la figure d'interférence ? Pour $N = 500 \text{ mm}^{-1}$ et $\lambda_{réf} = 500 \text{ nm}$, quelle est la valeur maximale de \mathbf{j} ?

□ 6 – Exprimer $t(x, y, 0)$, coefficient de transmission de la plaque après développement, en se limitant au terme du premier ordre en \mathbf{e} .

□ 7 – La plaque, de dimensions (centimétriques) a selon Ox et h selon Oy, est éclairée par l'onde de lecture, dans le domaine du visible, d'amplitude A_{lec} , de longueur d'onde $\lambda_{réf}$ et de vecteur d'onde $(\sin \theta \mathbf{u}_x + \cos \theta \mathbf{u}_z) k_{réf}$. En utilisant le principe de Huygens-Fresnel, calculer l'amplitude de l'onde diffractée par la plaque photographique dans la direction définie par le vecteur unitaire $\mathbf{u}_d = a_d \mathbf{u}_x + b_d \mathbf{u}_y + g_d \mathbf{u}_z$. On constatera que cette amplitude est la somme de trois termes, que l'on notera respectivement a_{d1} , a_{d2} et a_{d3} .

On rappelle la relation de définition : $\int_{-\frac{u}{2}}^{\frac{u}{2}} \exp\left(2ip \frac{ax}{l}\right) dx = u \operatorname{sinc}\left(\frac{pau}{l}\right)$.

□ 8 – On étudie séparément les intensités I_1 , I_2 et I_3 associées respectivement aux amplitudes a_{d1} , a_{d2} et a_{d3} . Montrer que les directions des maxima principaux d'intensité sont situées dans le plan (zx) et expliciter b_d pour de tels maxima ; posant $\mathbf{u}_d = \mathbf{u}_x \sin(\mathbf{q}_d) + \mathbf{u}_z \cos(\mathbf{q}_d)$, donner les relations vérifiées par $\sin(\mathbf{q}_d)$ pour les directions d'intensité maximale ; par analogie avec un réseau de fentes fines, donner les ordres auxquels correspondent ces maxima d'intensité.

□ 9 – Déterminer dans l'approximation des petits angles les demi-largeurs angulaires des pics principaux de diffraction par rapport aux axes x et y . Calculer, en fonction de m et de \mathbf{g} les valeurs relatives des maxima principaux d'intensité diffractée pour les composantes dépendant de m par rapport au maximum de l'intensité diffractée par la composante qui n'en dépend pas.

□ 10 – À quelle condition sur \mathbf{j} , $\lambda_{réf}$ et a la distance angulaire entre les pics principaux de diffraction est-elle grande devant leurs largeurs angulaires ? Déterminer dans ce cas l'expression approchée de l'intensité diffractée. Représenter, pour $b_d = 0$, son allure en fonction de a_d .

□ 11 – Déterminer, pour $\mathbf{q} = \mathbf{j}$, la composante de l'amplitude diffractée qui permet de reconstituer l'image de l'objet. Quelle est l'influence d'une variation de \mathbf{q} sur la direction

de reconstitution de cette image ?

□ 12 – Pour que la reconstitution soit acceptable, il faut que l'intensité associée à la composante indépendante de m dans la direction de reconstitution de l'image soit inférieure à une certaine fraction de l'intensité maximale associée à l'image. En déduire l'ordre de grandeur de la valeur minimale à donner à l'angle \mathbf{j} (on majorera $|\text{sinc } x|$ par $1/x$). Application numérique : $gm = 10^{-3}$, $f = 10^{-1}$, $a = 1$ cm.

□ 13 – La plaque photographique est remplacée à partir de maintenant et dans toutes les questions qui suivent par une couche transparente de mêmes dimensions, orientée de manière identique et d'épaisseur e suffisamment faible pour qu'elle puisse être considérée comme une surface diffractante coïncidant avec le plan Oxy . Cette plaque est *photosensible* : la valeur en tout point M de son indice de réfraction n reproduit celle de l'intensité incidente $I(M)$ selon la loi $n(M) = n_0 + \alpha I(M)$. L'hologramme est ainsi obtenu sous la forme de réseau d'indice. Les angles avec l'axe Oz restent quasiment nuls. Exprimer pour tout point M la différence de chemin optique $\mathbf{d}(M)$ entre un rayon traversant la couche photosensible sous incidence quasi-normale et un rayon se propageant dans le vide.

□ 14 – On note $t(M) = \exp(-2i\pi \mathbf{d}(M)/I_{\text{réf}})$ la transparence de l'hologramme associée à $\mathbf{d}(M)$. Montrer que si le terme $\frac{\alpha I(M)e}{I_{\text{réf}}}$ est suffisamment petit, cette transparence peut s'écrire sous la forme $t(M) = t_0 [1 + \underline{C} I(M)]$, où t_0 et \underline{C} sont des constantes complexes, dont on donnera les expressions. En déduire que les caractéristiques géométriques de la figure de diffraction lors de la lecture sont identiques à celles obtenues avec une plaque photographique.

□ 15 – On enregistre successivement deux hologrammes. Les ondes de références sont de même intensité et de même longueur d'onde $I_{\text{réf}}$, leurs directions respectives sont caractérisées par les angles \mathbf{j}_1 et \mathbf{j}_2 . Les objets restent ponctuels et situés sur l'axe Oz , les amplitudes des ondes objet sont A_1 et A_2 ($|A_1|, |A_2| \ll |A_{\text{réf}}|$). Avec des notations analogues à celles de la relation [1], les intensités lors des enregistrements sont :

$$I_1(M) = \frac{I_0}{2} [1 + m_1 \cos(\mathbf{OM} \cdot \Delta \mathbf{k}_1)] \quad \text{et} \quad I_2(M) = \frac{I_0}{2} [1 + m_2 \cos(\mathbf{OM} \cdot \Delta \mathbf{k}_2)]$$

La transparence après l'enregistrement est alors $t(M) = t_0 \{1 + \underline{C} [I_1(M) + I_2(M)]\}$.

L'hologramme étant éclairé par l'onde de lecture sous l'angle d'incidence \mathbf{q} , caractériser les positions, les tailles angulaires et les intensités relatives des pics principaux de diffraction. En déduire que l'on reconstitue simultanément les images des deux objets.

□ 16 – Les images des deux objets sont dites séparées si les taches principales de diffraction qui leur sont associées ne se recouvrent pas (les limites des taches principales de diffraction sont ici les premiers points où l'intensité s'annule, de part et d'autre du maximum principal). En déduire l'expression et la valeur de l'écart minimal $(\Delta \mathbf{j})_{\text{min}}$ entre les directions des faisceaux de référence lors de l'enregistrement des hologrammes successifs. Quels facteurs peuvent contribuer à augmenter $(\Delta \mathbf{j})_{\text{min}}$?

Partie II : Stockage d'hologrammes

Cette partie étudie une méthode thermo-optique d'enregistrement d'hologramme. On se limite à des phénomènes unidimensionnels selon l'axe Ox . L'intensité lumineuse éclairant le support lors de l'enregistrement s'exprime par $I(x) = I_0 [1 + m \cos(kx)]$, le terme de modulation $I_0 m \cos(kx)$ contenant l'information sur l'objet holographié. L'indice n du support dépend de la température : $n(T) = n_0 + \left(\frac{dn}{dT} \right)_{T=T_0} (T - T_0)$. On s'intéresse à

l'établissement d'un champ de température $T(x, t)$ dans un milieu transparent soumis à l'intensité lumineuse $I(x)$. Ce milieu est caractérisé par sa masse volumique μ , sa capacité thermique massique c , sa conductivité thermique I_c , toutes grandeurs indépendantes de la température. Le volume $d\tau$ entourant le point P soumis à l'intensité lumineuse $I(P)$ absorbe un flux thermique $d p_{th} = a I(P) d\tau$. On néglige les effets de bord, ce qui permet de raisonner comme si le milieu était infini.

□ 17 – Établir, en effectuant le bilan thermique d'une tranche d'épaisseur dx du milieu, l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le champ de température $T(x, t)$:

$$\mu \frac{\partial T}{\partial t} = I_c \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + a I(x).$$

□ 18 – La température initiale est homogène, égale à T_0 ; l'intensité lumineuse $I(x)$ est présente dans le milieu entre les instants 0 et t ; Sachant que $T(x, t)$ est de la forme $T(x, t) = T_m(t) + \Delta T(t) \cos(kx)$, déterminer $T_m(t)$ et $\Delta T(t)$ pour $0 < t < t$; quel aspect du modèle vous semblerait le plus critiquable ?

□ 19 – Exprimer l'indice du milieu $n(x, t)$ sous la forme $n(x, t) = n(t) + \Delta n(t) \cos(kx)$. Quel est le temps caractéristique d'évolution de $n(t)$?

□ 20 – Exprimer le champ de température et l'amplitude de la modulation spatiale d'indice $\Delta n(t)$ pour $t > \Delta t$.

□ 21 – Application numérique : $\mu = 1,9 \times 10^3 \text{ kJ.m}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$, $I_c = 0,17 \text{ W.m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $m = 1$, $2\delta/k = 3 \text{ }\mu\text{m}$, $t = 10 \text{ ns}$, $(dn/dT) = -3,6 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$, épaisseur : $l_0 = 3 \text{ mm}$. L'intensité lumineuse est confinée dans un cylindre d'axe Ox de section $S = 0,8 \text{ mm}^2$ et de longueur l_0 . L'énergie absorbée durant l'illumination est $E_0 = E_0 = 5,7 \times 10^{-5} \text{ J}$. Déterminer le temps caractéristique τ_0 et la puissance moyenne absorbée par unité de volume aI_0 . Simplifier l'expression de $n(t)$ et calculer sa valeur numérique.

□ 22 – L'utilisation de l'effet thermo-optique pour la réalisation de mémoires holographiques durables est-elle commode ?

Fin de ce problème
FIN DE L'ÉPREUVE