

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH
SUPAERO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (FILIÈRE MP)
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 2012
SECONDE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Filière PC

(Durée de l'épreuve: 4 heures)

L'usage de la calculatrice est autorisé

Sujet mis à disposition des concours : Cycle international, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

PHYSIQUE II — PC.

L'énoncé de cette épreuve comporte 7 pages.

- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il est invité à le signaler sur sa copie et à poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il aura été amené à prendre.
- Il ne faudra pas hésiter à formuler les commentaires (incluant des considérations numériques) qui vous sembleront pertinents, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

UN SOIR D'ÉTÉ

Même dans la douceur d'un soir d'été, un physicien cherche à modéliser les phénomènes qui l'entourent : l'eau de la piscine (partie I), les mouvements d'un insecte pris au piège d'une toile d'araignée (partie II) ou les battements des ailes des papillons (partie III).

Les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires : \hat{e}_x ; ou d'une flèche dans le cas général : \vec{r} , \vec{v} . Pour les applications numériques, trois chiffres significatifs sont requis. Les nombres complexes sont soulignés mis à part $i^2 = -1$.

I. — L'eau dans la piscine

L'eau contenue dans une piscine rectangulaire est assimilée à un fluide parfait (non visqueux) caractérisé par une masse volumique au repos $\rho_e = 1,00 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. On note $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ l'accélération de la pesanteur. Dans cette partie, on s'intéresse à deux questions I.A (est-il possible, lorsqu'on parle au bord de la piscine, d'être entendu par un nageur plongé sous l'eau ?) et I.B (quelle est l'origine du « clapotis » à la surface libre de l'eau ?) qui sont d'ailleurs totalement indépendantes.

I.A. — Parler dans l'air, entendre dans l'eau ?

Dans cette partie I.A, on tient compte de la compressibilité isentropique $\chi_e = 4,60 \times 10^{-10}$ SI de l'eau, supposée constante dans les conditions de la propagation des ondes acoustiques (ondes de compression de faible amplitude). On note $\gamma = c_p/c_v$ le rapport des capacités thermiques massiques à pression constante c_p et à volume constant c_v . Pour un gaz de molécules diatomiques rigides on rappelle que $c_p = 7R/2$ et $c_v = 5R/2$.

□ 1 — Rappeler la définition et l'unité de mesure de la compressibilité χ . Comparer, dans les conditions normales de température et de pression, les valeurs de χ_e et celle de la compressibilité isentropique $\chi_{gp,2}$ d'un gaz parfait diatomique.

On note (Oz) la verticale ascendante, p_0 la pression atmosphérique. En présence d'une onde acoustique, en un point repéré par le vecteur \vec{r} à l'instant t on admet que la pression p , la densité volumique de masse ρ et le champ de vitesse $\vec{v}(\vec{r}, t)$ dans le fluide se mettent sous la forme

$$\begin{aligned} p(\vec{r}, t) &= p_0 - \rho_e g z + \varepsilon \pi_e(\vec{r}, t) + o(\varepsilon) \\ \rho(\vec{r}, t) &= \rho_e + \varepsilon \rho_{e1}(\vec{r}, t) + o(\varepsilon) \\ \vec{v}(\vec{r}, t) &= \vec{v}_0 + \varepsilon \vec{v}'_e(\vec{r}, t) + o(\varepsilon) \end{aligned} \quad \text{avec } \varepsilon \ll 1$$

La vitesse \vec{v}_0 correspond à celle des particules de fluide à l'équilibre dans le référentiel galiléen considéré. On peut donc choisir un référentiel dans lequel le fluide est au repos à l'équilibre et donc $\vec{v}_0 = \vec{0}$.

□ 2 — En utilisant l'équation d'Euler, exprimer, à l'ordre ε , la dérivée $\frac{\partial \vec{v}'_e}{\partial t}$ en fonction de π_e , χ_e , ρ_e et g . On suppose que l'onde acoustique est harmonique de longueur d'onde λ . Déterminer l'expression d'une longueur λ_0 telle que

$$\text{Si } \lambda \ll \lambda_0 \text{ alors } \frac{\partial \vec{v}'_e}{\partial t} \simeq -\frac{1}{\rho_e} \text{grad}(\pi_e).$$

On exprimera λ_0 en fonction de g , ρ_e et χ_e . Calculer la valeur numérique de λ_0 . Que peut-on en conclure ?

□ 3 — En exprimant, au même ordre, la loi locale de conservation de la masse, établir l'équation aux dérivées partielles du second ordre vérifiée par $\pi_e(\vec{r}, t)$. Quelle signification donner à $c_e = 1/\sqrt{\rho_e \chi_e}$? Calculer sa valeur numérique.

L'air a pour masse volumique au repos $\rho_a = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et pour compressibilité isentropique $\chi_a = 5,7 \times 10^{-6} \text{ SI}$. L'appel du professeur (dans l'air) au nageur (dans l'eau) est modélisé par la propagation d'une onde acoustique plane progressive, de fréquence f , qui atteint la surface horizontale de l'eau sous l'incidence $\theta > 0$; elle donne lieu à la propagation d'une onde réfractée sous l'angle $\theta' > 0$. La géométrie du problème est représentée sur la figure 1.

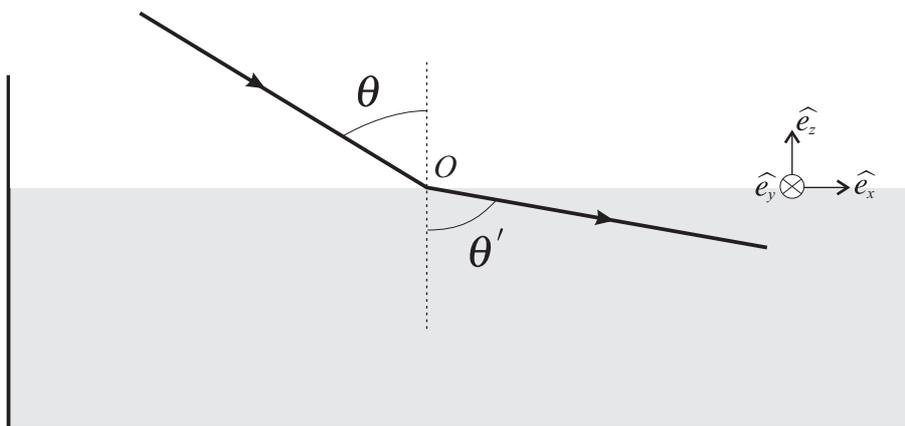


FIGURE 1 – Réfraction d'une onde acoustique à la surface de l'eau

□ 4 — Déterminer la représentation complexe $\underline{\pi}_a(\vec{r}, t)$ de l'onde de pression associée à l'onde incidente. On exprimera $\underline{\pi}_a(\vec{r}, t)$ en fonction de x , z , t , f , θ et $c_a = 1/\sqrt{\rho_a \chi_a}$, on notera Π_a son amplitude et on choisira la phase de cette onde nulle au point origine des coordonnées.

□ 5 — Montrer que l'onde réfractée possède la même fréquence que l'onde incidente et déterminer la direction θ' de la propagation de cette onde. Que dire de l'onde réfractée si $\theta = 45^\circ$? A quelle condition nécessaire sur θ l'appel du professeur peut-il être entendu ?

Afin de préciser les conditions de transfert de la puissance acoustique de l'air dans l'eau, on étudie dans les questions 6 à 8 une onde acoustique se propageant en incidence normale ($\theta = 0$) depuis l'air vers l'interface $z = 0$ qui sépare l'eau de l'air.

❑ 6 — Déterminer les expressions des représentations complexes des ondes réfléchi (notée $\underline{\pi}_r$) et transmise (notée $\underline{\pi}_e$) en fonction de Π_a , f , t , z , c_a ou c_e et des coefficients de réflexion \bar{r} ou de transmission \bar{t} de l'onde de pression incidente.

❑ 7 — Déterminer les expressions des représentations complexes des vitesses de déplacement de fluide associées à ces trois ondes ; on les écrira en fonction de Π_a , (ρ_a, c_a) ou (ρ_e, c_e) , \bar{r} ou \bar{t} et f , t , z . En déduire les expressions des coefficients \bar{r} et \bar{t} à l'interface air-eau, en admettant la continuité de la pression de part et d'autre de cette interface.

❑ 8 — Définir le coefficient de transmission $T_{1/2}$ de l'intensité acoustique d'un milieu 1 vers un milieu 2. Montrer que dans le cas de la transmission d'une onde sonore de l'air vers l'eau

$$T_{a/e} \simeq \frac{4\rho_a c_a}{\rho_e c_e}$$

Calculer la valeur numérique de $T_{a/e}$. Que peut-on en conclure ?

I.B. — Le clapotis de l'eau dans la piscine

On mène à présent l'étude des oscillations de la surface de l'eau de la piscine. Cette dernière est un parallélépipède de longueur L , de largeur ℓ et de profondeur H . L'air qui la surmonte sera considéré comme un fluide de pression uniformément égale à $p = p_0$ en $z = 0$; l'accélération de la pesanteur est $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Pour étudier les oscillations de sa surface, on assimile l'eau à un fluide *incompressible*, non visqueux dont la densité volumique de masse $\rho_e = 1,00 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ est constante. On néglige toutes les forces autres que de pesanteur et de pression.

Dans ces conditions, on recherche des solutions aux équations de l'hydrodynamique sous la forme d'ondes planes caractérisées par une vitesse de propagation (vitesse de phase) $\vec{u} = u\hat{n}$, où $u > 0$ et \hat{n} est un vecteur unitaire du plan horizontal (Oxy). Les ondes planes associées aux champs de pression $p(\vec{r}, t)$ et de vitesse $\vec{v}(\vec{r}, t)$ ont pour pulsation ω et pour vecteur d'onde $\vec{k} = \frac{\omega}{u}\hat{n}$.

❑ 9 — Dans le cadre du modèle proposé, rappeler l'expression générale du champ d'accélération $\vec{a}(\vec{r}, t)$ dans l'eau. Montrer que l'approximation $\|\vec{v}\| = v \ll u$ permet d'en proposer une forme simplifiée que l'on utilisera dans la suite de cette partie.

❑ 10 — Justifier que l'écoulement non stationnaire de l'eau peut alors être décrit comme *irrotationnel* ou *potentiel* : $\vec{v}(\vec{r}, t) = \overrightarrow{\text{grad}}[\phi(\vec{r}, t)]$. Montrer qu'à un choix près de l'origine des potentiels (que l'on justifiera avec soin), on peut établir en $z = 0$ l'équation

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$$

❑ 11 — On cherche le potentiel des vitesses sous la forme $\phi(\vec{r}, t) = \xi(z) \exp(i\omega [t - \frac{1}{u} \vec{r} \cdot \hat{n}])$. Expliciter, sous cette hypothèse, la condition aux limites en $z = 0$, à la limite de la surface libre de l'eau ; puis, justifier la condition décrivant l'écoulement au fond de la piscine : $\left. \frac{d\xi}{dz} \right|_{z=-H} = 0$.

❑ 12 — En considérant l'équation locale de conservation de la matière, établir l'équation différentielle du second ordre vérifiée par $\xi(z)$. En utilisant la condition sur le fond de la piscine déterminer l'expression de $\xi(z)$ en fonction de $\xi(0)$, ω , u , H et z . On utilisera la fonction cosinus hyperbolique.

❑ 13 — En utilisant la condition sur la surface libre, établir enfin l'expression reliant la vitesse de phase $u(\omega)$ des ondes de surface et la pulsation ω avec les paramètres g et H .

- 14 — Le clapotis de l'eau dans la piscine se traduit par un bruit parfaitement audible car la fréquence f des oscillations peut se trouver dans le même domaine que les ondes sonores audibles dans l'air. Proposer une valeur raisonnable pour f et en déduire, dans une *approximation de grande profondeur* (que l'on vérifiera et que l'on conservera dans la suite) la valeur correspondante de u .
- 15 — En justifiant votre réponse, diriez-vous que ces ondes de surface sont *dispersées* ou *non dispersées*? Montrer que, dans l'approximation retenue, la vitesse de groupe u' de ces ondes est telle que $u' = \beta u$ où l'on déterminera $\beta \in \mathbb{Q}$.

FIN DE LA PARTIE I

II. — La toile de l'araignée

Ayant abandonné l'idée d'être entendu d'un nageur dans la piscine, le physicien commence une promenade dans le jardin qui l'amène à s'arrêter en admiration devant une toile d'araignée. Les fils en sont-ils aussi solides qu'on le dit? Cette partie se propose de répondre à la question.

II.A. — Modélisation d'un fil élastique

- 16 — On considère d'abord un ressort élastique, régi par la loi de Hooke, dont on note k la raideur et ℓ_0 la longueur à vide; on note aussi $s = 1/k$ la *souplesse* du ressort. Quelle est la force exercée par ce ressort sur son extrémité lorsqu'il acquiert la longueur ℓ ? On précisera le sens de cette force sur un schéma.
- 17 — On associe en *série* (cf. figure 2-a) deux ressorts élastiques, alignés, de raideurs k_1 et k_2 , de longueur à vide ℓ_{01} et ℓ_{02} , formant un système élastique unique de longueur totale $\ell = \ell_1 + \ell_2$. Montrer que l'ensemble est équivalent à un ressort élastique unique de longueur à vide $\ell_0 = \ell_{01} + \ell_{02}$ dont on exprimera la constante de raideur k en fonction de k_1 et k_2 . Ce ressort est-il *plus souple* ou *plus raide* que chacun des deux ressorts dont il est formé?

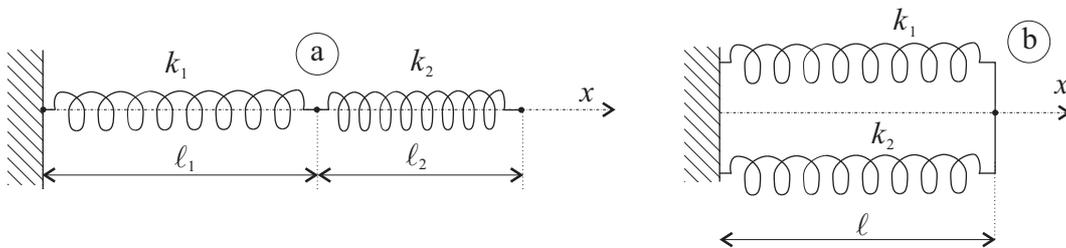


FIGURE 2 – Association de deux ressorts en série (a) et en parallèle (b)

- 18 — On associe maintenant en *parallèle* (cf. figure 2-b) les deux ressorts élastiques de la question précédente formant un système élastique unique de longueur $\ell = \ell_1 = \ell_2$. Déterminer la raideur k et la longueur à vide ℓ_0 du ressort élastique unique équivalent à cette association; Commenter sa souplesse.
- 19 — En vous appuyant sur les résultats des questions 17 et 18, expliquez pourquoi la force exercée sur une de ses extrémités par un fil élastique de longueur ℓ_0 , de section s , peut être décrite par une loi analogue à celle qui régit les ressorts élastiques (loi de Hooke) avec pour constante de raideur du fil $k = Es/\ell_0$, la constante E , caractéristique du matériau dont il est constitué, est appelée module d'Young du fil. Montrer l'analogie de cette expression avec une relation, issue de votre programme, liée aussi aux lois d'association en série ou en parallèle.

Pour mesurer le module d'Young d'un fil d'araignée, le physicien procède à l'expérience suivante :

il prélève sur une toile un fil d'araignée cylindrique, de rayon r_0 , de section constante $s = \pi r_0^2$, de longueur à vide ℓ_0 , et il le fixe en deux points fixes situés sur une même horizontale, distants de ℓ_0 . Il attache alors, en un point du fil, un hameçon muni d'un ou plusieurs plombs de pêche ; le module du poids de l'ensemble est noté P (cf. figure 3). Le fil élastique se tend et prend à l'équilibre une forme en V, les deux segments du fil, de longueurs ℓ_1 et ℓ_2 , formant avec l'horizontale les angles α_1 et α_2 positifs et dans l'intervalle $[0, \pi/2[$. On peut aussi noter h la flèche du fil, c'est-à-dire la hauteur du point d'attache de l'hameçon sous l'horizontale, à l'équilibre.

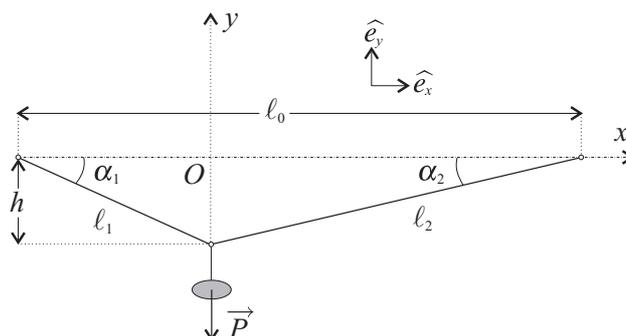


FIGURE 3 – Mesure du module d'Young d'un fil

❑ 20 — Établir, à l'équilibre du fil, les expressions des modules F_1 et F_2 des forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 exercées par les deux brins de fil, de longueurs respectives ℓ_1 et ℓ_2 , sur le point d'attache de l'hameçon, en fonction de P , α_1 et α_2 .

❑ 21 — Établir les expressions de $\cos \alpha_1$ et $\cos \alpha_2$ en fonction de ℓ_0 , ℓ_1 et ℓ_2 .

❑ 22 — On suppose que la section s du fil reste constante pendant l'étirement et que les forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 peuvent être modélisées par la loi de Hooke décrite à la question 19. Montrer que la grandeur $x = (Es)^{-1}$ est solution de l'équation $\ell_0 = \ell_1(1 + xF_1)^{-1} + \ell_2(1 + xF_2)^{-1}$. Exprimer x en fonction des paramètres

$$a = F_1 F_2, \quad b = F_1 \left(1 - \frac{\ell_2}{\ell_0}\right) + F_2 \left(1 - \frac{\ell_1}{\ell_0}\right) \quad \text{et} \quad c = 1 - \frac{\ell_1 + \ell_2}{\ell_0}$$

Pour chaque mesure, on note, en fonction du nombre n de plombs de pêche attachés à l'hameçon, les valeurs de P , ℓ_1 et ℓ_2 (mesurés), de α_1 et α_2 (calculés comme à la question 21), de F_1 et F_2 (calculés comme à la question 20) avant d'en déduire la valeur de Es (en résolvant l'équation du second degré proposée à la question 22). Le tableau proposé ci-après correspond à $\ell_0 = 3,52$ cm.

| n | P (mN) | ℓ_1 (cm) | ℓ_2 (cm) | α_1 (°) | α_2 (°) | F_1 (mN) | F_2 (mN) | Es (mN) |
|-----|----------|---------------|---------------|----------------|----------------|------------|------------|-----------|
| 1 | 0,711 | 1,84 | 1,79 | 13,9 | 14,3 | 1,45 | 1,46 | 46,6 |
| 3 | 2,07 | 1,68 | 2,01 | 19,2 | 15,9 | 3,46 | 3,40 | 71,1 |
| 4 | 2,74 | 1,45 | 2,30 | | | | | |
| 5 | 3,42 | 1,56 | 2,24 | 26,8 | 18,3 | 4,59 | 4,31 | 55,7 |
| 6 | 4,10 | 1,62 | 2,24 | 28,8 | 20,4 | 5,08 | 4,75 | 50,6 |
| 7 | 4,77 | 2,32 | 1,56 | 20,1 | 30,7 | 5,29 | 5,78 | 53,7 |

❑ 23 — Compléter la ligne manquante du tableau.

❑ 24 — Le rayon du fil utilisé est mesuré au microscope : $r_0 = 5,00 \pm 0,25 \mu\text{m}$. En déduire une estimation du module d'Young du fil, et la précision de cette estimation. Quelle est la dimension ou l'unité de E ?

II.B. — Oscillations de la toile complète

On étudie maintenant la toile complète, qui sera, dans la situation de repos, modélisée comme une structure circulaire horizontale comportant des fils radiaux disposés aux angles $\theta_k = 2k\pi/N$, avec $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$; le nombre de rayons de la toile est donc N . Ces fils sont tramés avec des fils circulaires disposés régulièrement aux rayons $r_p = pa$ où $p = 0, 1, 2, \dots$, le tout est représenté sur la figure 4. Le bord circulaire (\mathcal{C}) de la toile est horizontal, rigidement fixé à la végétation, de rayon $R = 20$ cm.

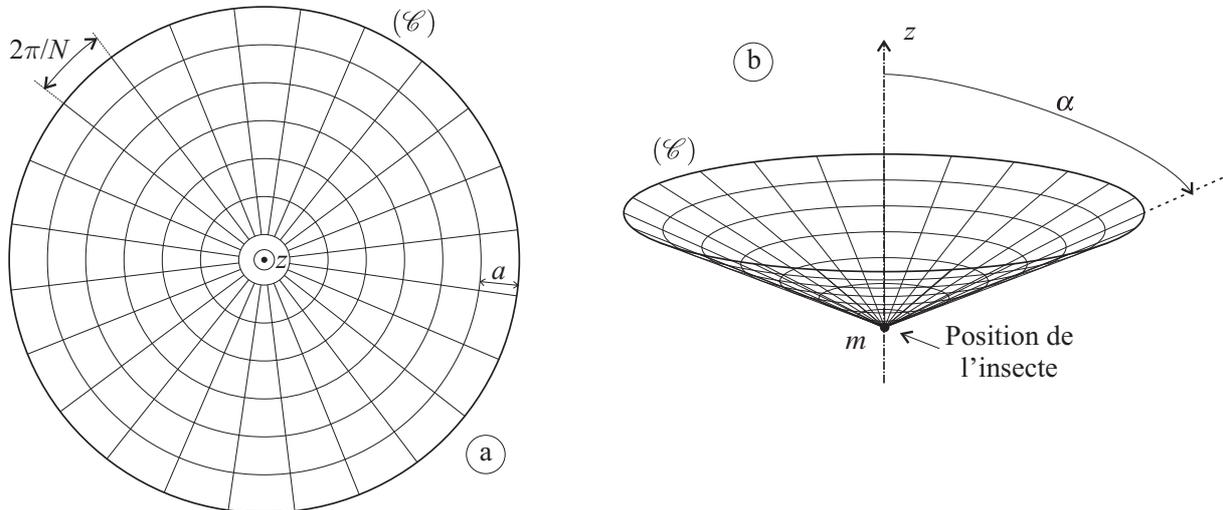


FIGURE 4 – Modèle de toile d'araignée au repos (a) ou déformée (b)

On ne s'intéresse qu'aux oscillations de la toile respectant la symétrie de révolution ; les fils de la toile sont tous au repos lorsque la toile est plane. Un insecte, pris au piège au centre de la toile, provoque la déformation de la toile ; on suppose qu'elle forme alors un cône d'axe vertical (Oz) et d'angle au sommet α . On notera m la masse de l'insecte fixé au centre de la toile (donc au sommet du cône et on négligera la masse des fils de la toile.

▣ 25 — Au cours du mouvement, comment évolue la longueur des fils circulaires (de longueur au repos $\ell_{0,c} = 2\pi r_p$) ? Même question pour les N fils radiaux (de longueur au repos égale au rayon de la toile : $\ell_{0,r} = R$).

Chacun des fils de la toile, de longueur au repos ℓ_0 , exerce sur chacune de ses extrémités, lorsqu'il est étiré à la longueur ℓ , une force de rappel de norme $F = k(\ell - \ell_0)$ où $k = Es/\ell_0$ ne dépend que de la section constante s du fil et de son module d'Young E .

▣ 26 — Montrer que la position z de l'insecte sur la toile vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d^2z}{dt^2} + g = \frac{NEs}{m}f(\alpha)$$

où on précisera la fonction $f(\alpha)$.

▣ 27 — Montrer que l'étude des petits mouvements de l'insecte autour de sa position d'équilibre, repérée par $\alpha = \alpha_0$, conduit à l'équation différentielle

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{g}{R}h(\alpha_0)(\alpha - \alpha_0) \text{ avec } h(\alpha) = \sin^2(\alpha)\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}$$

Pour $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$, on obtient $h(\alpha_0) = -2,21$; que peut-on en conclure ? La période des petites oscillations dépend-elle de la masse de l'insecte ?

FIN DE LA PARTIE II

III. — Le vol des papillons

Attristé peut-être par le sort de l'insecte piégé au centre de la toile, notre physicien s'intéresse enfin au vol des papillons. Ceux-ci, de taille et de forme variée, présentent, à l'œil exercé du physicien (et entomologiste amateur) une propriété remarquable : plus ils sont petits, plus le battement de leurs ailes est rapide. Nous nous proposons de rendre compte de cette propriété dans le cadre d'une simple analyse de facteurs significatifs. Ainsi, l'étude d'une famille d'animaux de même forme (homothétiques) mais de dimensions variables conduit à affirmer que la surface S des ailes est simplement proportionnelle au carré de leur dimension caractéristique ℓ , ce qu'on écrira $S \propto \ell^2$; cette notation signifie que $S = k\ell^2$, où k est une certaine constante (fonction par exemple de la forme des ailes) qu'on ne cherche pas à déterminer.

L'étude des facteurs significatifs peut être menée par une étude de diagrammes logarithmiques, à partir par exemple du tableau de données expérimentales ci-après qui donne, pour différentes espèces, des mesures de l'envergure R des ailes (plus grande distance de l'aile au point milieu de l'abdomen), de la longueur L du corps (de la tête à la queue) et de la fréquence f_b du battement des ailes en vol (mesurée par des caméras rapides).

| Espèce | R [mm] | L [mm] | f_b [Hz] | Photo |
|---------------------------|----------|----------|------------|---|
| <i>Troides radamantus</i> | 65 | 46 | 9 |  |
| <i>Papilio rumanzovia</i> | 61 | 35 | 10 |  |
| <i>Pachliopta hector</i> | 44 | 27 | 13 |  |
| <i>Graphium sarpedon</i> | 39 | 25 | 16 |  |
| <i>Precis iphita</i> | 33 | 21 | 19 |  |
| <i>Calospila idmon</i> | 15 | 11 | 32 |  |

□ 28 — Par une étude précise (le tracé d'un diagramme logarithmique par exemple), montrer l'existence d'un exposant a décrivant, pour l'ensemble des espèces citées dans ce tableau, une relation entre dimensions, sous la forme $R \propto L^a$. Commenter la valeur de a ainsi déterminée.

□ 29 — Le papillon en vol équilibre les forces de volume F_v (pesanteur, poussée d'Archimède) et les forces de surface (forces de contact des pattes avec les supports) par une force de poussée hydrodynamique. Les forces de surface F_s suivent bien une loi d'échelle avec pour facteur significatif L , dont on admettra qu'on peut l'écrire $F_s \propto L^2$. Justifier l'existence d'une relation du type $F_v \propto L^c$ et préciser la valeur de c .

□ 30 — La force de poussée hydrodynamique Π due aux battements des ailes ne dépend que de la masse volumique ρ_a de l'air, de la surface S des ailes et de la fréquence f_b du battement des ailes. En admettant une expression du type $\Pi \propto \rho_a^p S^q f_b^r$, déterminer les entiers p , q et r par analyse dimensionnelle.

□ 31 — Le vol (stationnaire) du papillon est régi par une loi mécanique du type $\Pi = F_v + F_s$, où l'un des deux termes (de surface F_s ou de volume F_v) est prépondérant. En supposant que $f_b \propto L^k$, déterminer les valeurs de k correspondant au fait que F_v ou F_s soit prépondérant.

□ 32 — A partir des données expérimentales déterminer celui des deux termes F_v ou F_s qui est effectivement prépondérant.

FIN DE LA PARTIE III

FIN DE L'ÉPREUVE