

A 98 PHYS. I

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIERE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 1998

PREMIÈRE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Filière PSI

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Sujet mis à disposition du concours ENTPE suite à l'arrêté du 09 décembre 1997

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

PHYSIQUE I - PSI

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PSI, comporte 4 pages.

- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

- Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être utilisé pour les questions ultérieures, même s'il n'a pas été démontré.

- Il ne faudra pas hésiter à formuler les commentaires (incluant des considérations numériques) qui vous sembleront pertinents, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

Notations : vecteur $\rightarrow \mathbf{V}$ (gras) ; norme du vecteur $\mathbf{V} \rightarrow V$ (italique) ; vecteur unitaire $\rightarrow \hat{\mathbf{a}}$.

OSCILLATEURS, OSCILLATIONS

Premier problème : traitement approximatif d'une cavité médiocre

Le terme « cavité électromagnétique », hérité de la technologie des hyperfréquences, désigne tout organe très faiblement dissipatif capable de stocker de l'énergie et de la restituer, sous forme d'onde, dans des guides d'ondes. Des champs peuvent donc s'y maintenir, à certaines fréquences caractéristiques, et sans qu'il soit besoin de sources. La cavité la plus simple que l'on puisse imaginer est peut-être constituée d'un parallélépipède rectangle, vide, aux parois métalliques (infiniment conductrices), c'est-à-dire parfaitement réfléchissantes.

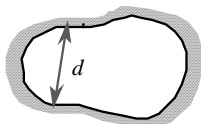


Fig. 1 : une cavité

□ 1 – Montrer qu'un rayonnement électromagnétique monochromatique ne peut exister dans une cavité cubique métallique d'arête d que si d est au moins aussi grand que la demi-longueur d'onde $\frac{\lambda}{2}$. Un argument qualitatif suffira. Comment généraliser cette propriété à une cavité de forme quelconque (fig. 1),

dont le plus petit diamètre est d ?

Toute dépendance temporelle étant de la forme $\exp(-i\omega t)$, le champ électrique monochromatique \mathbf{E} , de pulsation ω dans une cavité vide limitée par des parois parfaitement conductrices, est totalement décrit par les trois relations

$$\Delta \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (1) \quad \text{div}(\mathbf{E}) = 0 \quad (2) \quad \mathbf{E}_{\text{tangentielle}} = \mathbf{0} \text{ sur les parois} \quad (3)$$

□ 2 – Préciser le sens physique des relations (2) et (3). Considérons, en tant que modèle, une cavité où le champ \mathbf{E} , identiquement nul pour $|x| \geq d$, ne dépendrait que de l'abscisse x . Déterminer les fréquences possibles du champ à l'intérieur de cette cavité et retrouver le résultat de la première question.



Fig. 2 : une cavité électromagnétique ?

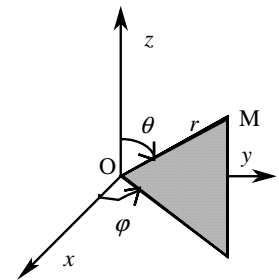
On considère ici (fig. 2) un exemple plutôt insolite de cavité « naturelle », constituée de la Terre d'une part, de l'ionosphère d'autre part (l'ionosphère est un ensemble de couches conductrices, constituées d'atomes ionisés, et s'étendant typiquement de 50 km à 500 km). La conductivité de l'eau de mer est d'environ 4 S.m^{-1} ; celle de l'ionosphère est de 10^3 à 10^6 inférieure à celle de l'eau de mer ; celle du cuivre est d'environ $10^{7 \text{ à } 8} \text{ S.m}^{-1}$. Le modèle physique consiste à affirmer que la surface de la Terre et la limite basse de l'ionosphère sont l'une et l'autre des parois métalliques (au sens de : parfaitement conductrices). La cavité est ainsi constituée de deux coquilles sphériques, de rayons respectifs a et

$b = a + h = a(1 + \varepsilon)$, avec $a \approx 6400 \text{ km}$ et $h \approx 100 \text{ km}$, séparées par un milieu que l'on assimilera au vide.

□ 3 – On s'intéresse d'abord aux modes, notés TE, où le champ radial E_r est nul. Montrer que les pulsations les plus basses associées à ces modes sont, en ordre de grandeur, $\omega_{\text{TE}} \approx \frac{\pi c}{h}$; calculer la valeur numérique de ω_{TE} .

On s'intéresse maintenant aux modes TM, où B_r est identiquement nul (le champ électrique radial E_r n'est plus nécessairement nul). On suppose que les champs ne dépendent pas de l'azimut φ . Les composantes à déterminer sont donc $E_r(r, \theta)$, $E_\theta(r, \theta)$, $E_\varphi(r, \theta)$, $B_\theta(r, \theta)$ et $B_\varphi(r, \theta)$; on donne, en coordonnées sphériques, lorsque $V_r = 0$ et $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$:

$$\begin{aligned} \text{div}(\mathbf{V}) &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta \sin \theta) \\ \text{rot}(\mathbf{V}) &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\varphi \sin \theta) \hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\varphi) \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \Delta f(r, \theta) &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \sin \theta \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) \end{aligned}$$



□ 4 – Montrer que, si $\|\mathbf{B}\|$ reste fini, alors $B_\theta = 0$ (considérer $\text{div}(\mathbf{B})$). Montrer aussi que l'on peut prendre $E_\varphi = 0$. Reste maintenant à déterminer $E_r(r, \theta)$, $E_\theta(r, \theta)$ et $B_\varphi(r, \theta)$.

□ 5 – Exprimer $E_r(r, \theta)$ et $E_\theta(r, \theta)$ en fonction de $B_\varphi(r, \theta)$.

□ 6 – Établir que l'équation différentielle satisfaite par le champ \mathbf{B} en régime harmonique de pulsation ω est $\Delta \mathbf{B} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{B} = \mathbf{0}$ (4). Donner alors l'équation différentielle satisfaite, en coordonnées sphériques, par la composante B_φ .

□ 7 – On démontre que, dans la solution de l'équation différentielle obtenue à la question 6, les variables sont séparables, de sorte que l'on peut poser $r B_\varphi = R(r) Y(\theta)$. Établir les équations (5) et (6) :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R}{dr^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{C^{\text{te}}}{r^2} \right) R(r) &= 0 \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{dY(\theta)}{d\theta} \sin \theta \right) + C^{\text{te}} Y(\theta) &= 0 \end{aligned} \quad (5 \text{ et } 6)$$

où C^{te} est un nombre réel sur lequel on ne sait rien *a priori*.

□ 8 – Montrer que les conditions aux limites du problème exigent $\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{C^{\text{te}}}{r^2} > 0$ pour $a \leq r \leq b = a(1 + \varepsilon)$. L'inégalité $\varepsilon \ll 1$ suggère de remplacer r par a dans l'expression $\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{C^{\text{te}}}{r^2}$ de l'équation différentielle régissant $R(r)$. Démontrer que les pulsations propres

de cette cavité sont alors $\omega_n = \sqrt{\frac{C^{\text{te}}}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{a^2}} = \frac{c}{a} \sqrt{C^{\text{te}} + \frac{n^2 \pi^2}{\varepsilon^2}}$ (7).

□ 9 – On démontre, et on admettra, que les solutions acceptables de (6) sont des polynômes, de degré 0, 1, 2 *etc.* par rapport à $u = \cos \theta$, et de parité alternée (*polynômes de Legendre*). Montrer, en considérant le terme de plus haut degré de l'équation différentielle (6) que cela limite les valeurs possibles de la constante C^{te} . Exprimer la pulsation $\omega_{n,\ell}$ associée au polynôme de degré ℓ .

□ 10 – Exprimer $f_{0,\ell} = \frac{\omega_{0,\ell}}{2\pi}$ et mettre ce résultat en perspective de la première question ; calculer les cinq premières plus basses fréquences de l'ensemble $f_{n,\ell}$. Ces fréquences ont été prédites théoriquement par Schumann en 1952. L'étude par Balser et Wagner, en 1960, du spectre électromagnétique en très basses fréquences, a montré des pics centrés autour de 8, 14, 20, 26, 32, 37 et 43 Hz. Commenter ces résultats.

□ 11 – Quelles peuvent être des origines du champ électromagnétique qui se propage autour de la Terre ? connaissez-vous d'autres exemples de guidage entre l'ionosphère et la

surface de la Terre ?

FIN DE CE PROBLÈME

ANTIÉLECTRONIQUE

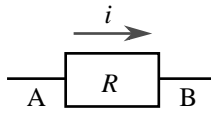


Fig. 3 : impédance

□ 1 – Avec les conventions de signe de la figure 3 on a $V_A - V_B = Ri$. Quelle impédance simule-t-on entre A et la terre si on réalise $V_B = 2V_A$ sans modifier le courant i ?

Proposer un montage réalisant cette condition et comprenant, outre la résistance R , deux résistances identiques R' et un amplificateur opérationnel travaillant en régime linéaire.

□ 2 – On considère le montage de la figure 4. Quelles sont les impédances équivalentes entre A et la terre d'une part et entre B et la terre d'autre part ? En déduire le schéma équivalent au montage ainsi que sa pulsation caractéristique.

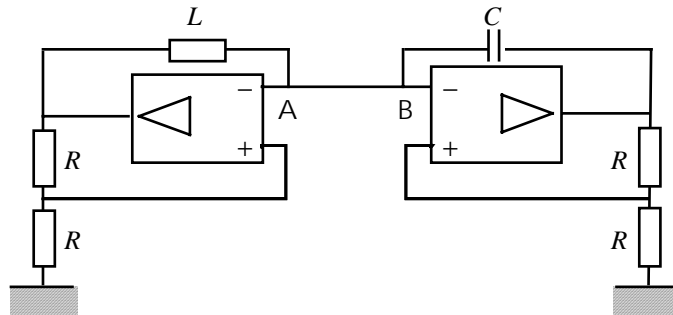


Fig. 4 : simulateurs d'impédances

□ 3 – En fait l'inductance n'est pas idéale, elle possède aussi une résistance r . Comment modifier le montage, en plaçant judicieusement une nouvelle résistance dont on donnera la valeur, pour que le schéma équivalent de la question 2 demeure valide.

□ 4 – Analyser le montage de la figure 5. Quelle est la nouvelle pulsation caractéristique ?

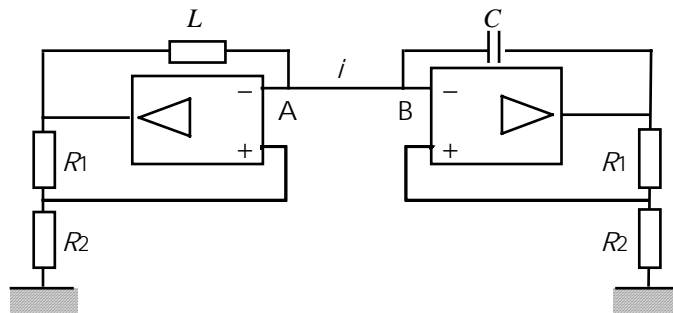


Fig. 5 : simulateurs d'impédances

FIN DE CE PROBLÈME

FIN DE L'ÉPREUVE