Premier problème : chute d'une tartine beurrée (mécanique du solide).

- **1**- En notant $\vec{T} = T\hat{r}$ et $\vec{N} = N\hat{\theta}$ (*T* et *N* algébriques), on a $m\vec{a}_G = T\hat{r} + N\hat{\theta} + m\hat{g}$, ce qui se projette sur $\hat{r}$ en : $-m\delta\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = T + mg\sin\theta$ et sur $\hat{\theta}$ en : $m\delta\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = N + mg\cos\theta$.

- **2**- La tartine est un solide en rotation autour de l'axe fixe *Oy* d'où $J_{Oy}\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = +mg\delta\cos\theta$. On remplace J_{Oy} par son expression et on arrive à $\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = \frac{g}{a}\frac{3\eta}{1+3\eta^2}\cos\theta$. On multiplie les deux membres par $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ pour obtenir $\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\left(\omega^2\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{g}{a}\frac{3\eta}{1+3\eta^2}\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ et on intègre de t = 0 à t pour aboutir à la relation (A) demandée : $\omega^2 = \frac{g}{a}\frac{6\eta}{1+3\eta^2}\sin\theta = \omega_0^2\sin\theta$ avec $\omega_0^2 = \frac{g}{a}\frac{6\eta}{1+3\eta^2}$.

- **3**- $E_c = \frac{1}{2}J_{Oy}\omega^2$ (solide en rotation autour d'un axe fixe) et $E_p = -mgz_G = -mg\delta\sin\theta$. $E_{méca}$ se conserve et vaut 0 (valeur à t = 0). On retrouve sans difficulté la relation demandée.

- **4**- On applique le théorème du moment cinétique au point *G* (ce qui est me semble-t-il HORS PROGRAMME) : $\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_G}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$ (la tartine n'est soumise qu'à son poids, de moment nul par rapport à *G*). Or $\vec{\sigma}_G = \vec{\sigma}^* = \frac{1}{2}J_{Gy}\omega^2\hat{y}$. Donc la vitesse de rotation reste constante à la valeur ω_0 et $\theta(t) = \frac{\pi}{2} + \omega_0 t$.

- **5**- Il faut que $\theta > \theta_1 = \frac{3\pi}{2}$ pour que la tartine retombe sur le côté non beurré (en admettant qu'elle fait moins d'un tour).

- **6**- Question mal posée, difficilement compréhensible : l'extrémité de la tartine ne passe pas par *O* ! La valeur de τ proposée correspond clairement à la durée d'une chute libre d'une hauteur de $(h-2a)$ *sans vitesse initiale*. Et quand l'extrémité de la tartine passe par la cote z = 0, la vitesse verticale de *G* n'est pas nulle ! La valeur de τ est donc une valeur approchée de la durée de la chute libre, ce qui n'est pas gênant pour la question **6**- mais l'est davantage pour la question **7**-. Et à quoi sert *ici* l'approximation η<<1 ? ? ? A.N. : τ = 0,36 s, ce qui rend le rattrapage difficile, surtout lorsqu'on est mal réveillé.

- **7**- La valeur limite de η est celle qui fait que l'angle θ a la valeur limite θ_1 à l'arrivée sur le sol. On écrit donc que $\theta = \theta_1$ au temps τ (ce qui suppose une définition de τ autre que celle de la question **6**- !). On arrive alors à $\eta_{\min} = \alpha$ (en utilisant *ici* l'approximation η<<1 pour écrire $\omega_0^2 = 6\eta\frac{g}{a}$). A.N. : $\eta_{\min} = 0{,}06$; comme η est en pratique de l'ordre de 0,02, la tartine tombe du côté beurré.

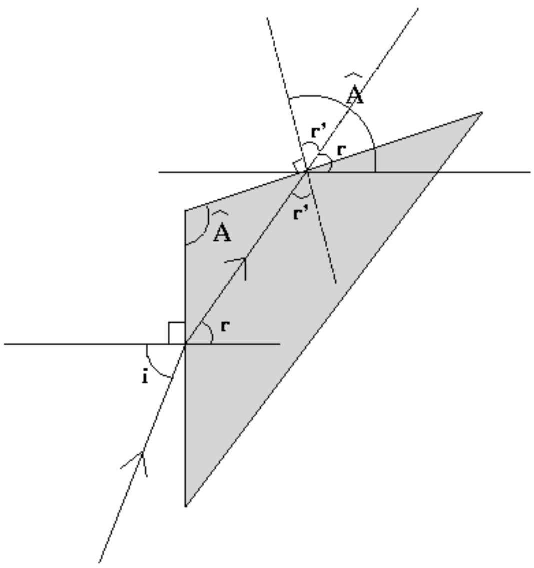
- **8**- $\eta_{\min}$ n'est pas modifié, mais le temps de chute est allongé (et vaudrait 0,59 s pour une table et une tartine de même taille que sur Terre).

- **9**- L'énergie potentielle doit être du même ordre de grandeur que sur Terre (elle est convertie en énergie cinétique en cas de chute par exemple) donc les dimensions terrestres doivent être multipliées par $\frac{g}{g_{\text{Mars}}}$ (de sorte que $gL = g_{\text{Mars}}L_{\text{Mars}}$). La taille d'un Martien serait de l'ordre de 4,50 m. Mais il est raisonnable de penser que les Martiens ont des tables plus grandes que les nôtres du même facteur, et de même pour les tartines qu'ils dégustent au petit-déjeuner. Le temps de chute serait donc en fait plus long (d'un facteur $\frac{g}{g_{\text{Mars}}}$) que sur Terre (de l'ordre de 0,96 s), ce qui laisse plus de chance au Martien de rattraper sa tartine (si toutefois il a des réflexes aussi rapides que les Terriens, ce qui n'a rien d'évident puisque son corps est plus grand : il faudrait s'intéresser à la vitesse de propagation de l'influx nerveux). Mais la vitesse de rotation serait plus faible (du facteur $\frac{g_{\text{Mars}}}{g}$). Finalement on voit (cf. l'expression de α) que la valeur de $\eta_{\min}$ est la même sur Mars et sur la Terre : les tartines martiennes tombent aussi du côté beurré.

❑ **10**- Le glissement ne va pas modifier sensiblement le temps de chute (encore faudrait-il définir précisément ce dernier : voir question **6**-). Par contre, et en supposant que le glissement se fasse avec frottements, l'énergie de la tartine sera moindre donc sa vitesse de rotation moins élevée, donc $\eta_{\min}$ sera encore plus grand et la tartine tombera encore plus facilement du côté beurré.

Deuxième problème : le petit halo (optique géométrique).

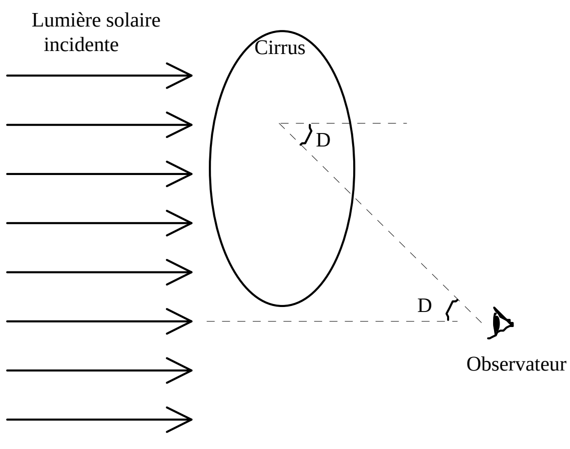
❑ **1**-



Une première condition doit être vérifiée par l'angle d'incidence *i* pour que le rayon réfracté dans le prisme atteigne sa seconde face : c'est $r > \hat{A} - \frac{\pi}{2}$, ce qui mène à $i > -\arcsin\left(n\cos\hat{A}\right) = 0{,}229\,\text{rad} = 13°$.
Parmi tous les rayons qui vont frapper la seconde face (c'est-à-dire ceux correspondant à $0{,}229\,\text{rad} < i < \frac{\pi}{2}$), celui qui arrive sur la seconde face avec l'incidence *r'* la plus faible est celui qui correspond à $i = \frac{\pi}{2}$. Son angle de réfraction est $r = \arcsin\frac{1}{n}$ = 0,868 rad = 49°46' et donc, comme $\hat{A} = r + r'$, son angle d'incidence sur la seconde face est $r' = \hat{A} - \arcsin\frac{1}{n}$. Si $\hat{A} > 100°$, *r'* est donc supérieur à 50°14', donc supérieur à l'angle de réfraction limite (qui vaut 49°46'). Donc ce rayon est totalement réfléchi, de même que tous les autres (qui ont une incidence *r'* supérieure).

❑ **2**- Rayons sortant par la face DE : non déviés (lame à faces parallèles).
Emergence par la face BC : impossible d'après la question **1**.

❑ **3**- Question classique ; les relations du prisme sont (notations de la figure de l'énoncé) : $\sin i = n\sin r$, $\sin i' = n\sin r'$, $\hat{A} = r + r'$, $D = i + i' - \hat{A}$. D'où $\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}i} = 1 + \frac{\mathrm{d}i'}{\mathrm{d}i} = 1 - \frac{\cos r'\cos i}{\cos i'\cos r}$, qui s'annule si $\cos r'\cos i = \cos i'\cos r$, soit, en mettant au carré : $\frac{\cos^2 i}{1-\frac{\sin^2 i}{n^2}} = \frac{\cos^2 i'}{1-\frac{\sin^2 i'}{n^2}}$, d'où $i = i'$, noté i_0.



On a donc $\sin i_0 = n\sin r_0$ et $\hat{A} = 2r_0$, donc $i_0 = \arcsin\left(n\sin\frac{\hat{A}}{2}\right)$ = 0,714 rad = 40°55' (l'angle $\hat{A}$ vaut ici 60°), et $D_m = 2i_0 - \hat{A}$ $= 2\arcsin\frac{n}{2} - \frac{\pi}{3}$ = 0,381 rad = 21°50'.

- **4**- Voir figure. Les cristaux étant très nombreux et orientés aléatoirement, ils dévient la lumière dans toutes les directions mais avec une surintensité pour la valeur D_m. Le physicien doit donc observer un halo circulaire de rayon d'environ 22° autour du soleil, soit de rayon égal à 44 fois le diamètre du soleil. La médiocre qualité de la photo fournie ne permet pas de vérifier *précisément* cette valeur. Elle ne permet cependant pas non plus de l'infirmer.

- **5**- $D_m = 2\arcsin\frac{n}{2} - \frac{\pi}{3}$ donc $\frac{\mathrm{d}D_m}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{n}{2}\right)^2}}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} < 0$, donc D_m est le plus petit pour le rouge (plus grandes longueurs d'onde) : le halo est irisé de rouge à l'intérieur.

Troisième problème : étude d'un réseau.

- **1**- Invariance par translation selon *Oz* : $\vec{E}_e$ ne doit pas dépendre de *z* donc $q_z = 0$.

  Périodicité de période *p* en *y* : $\vec{E}_e$ doit être périodique de période *p* en *y* donc $q_y = 2\pi\frac{m}{p}$ où $m \in \mathbb{Z}$.

  L'équation de propagation appliquée à E_{ez} s'écrit $\Delta E_{ez} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_{ez}}{\partial t^2} = 0$ ce qui donne ici $-q^2 + \frac{1}{c^2}\omega^2 = 0$ ou encore $q_x^2 + q_y^2 = k^2$.

- **2**- Une onde émergente est progressive plane si $q_x \in \mathbb{R}^+$ donc si $k^2 - q_y^2 > 0$ donc si $|m| < \frac{p}{\lambda}$; la valeur limite de $|m|$ en deçà de laquelle les ondes émergentes sont progressives planes est donc $\mathrm{E}\left(\frac{p}{\lambda}+1\right)$.

  Rq : 2 valeurs opposées de *m* correspondent à 2 ondes symétriques par rapport au plan *Oxz*. Pour une telle onde émergente, $\sin i' = \frac{q_y}{\sqrt{q_x^2+q_y^2}}$ avec $q_y = 2\pi\frac{m}{p}$ et $q_x = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{m^2}{p^2}}$, d'où $\sin i' = m\frac{\lambda}{p}$.

- **3**- Les valeurs possibles pour *m* vont de –3 à +3 inclus (d'après le **2**-). Il n'y a pas de diffraction selon *Oz*. On observe donc 7 points lumineux alignés dans la direction *y'y*, de positions en *y* : $f'\tan i' = f'\frac{\sin i'}{\sqrt{1-\sin^2 i'}} = f'\frac{m\frac{\lambda}{p}}{\sqrt{1-m^2\frac{\lambda^2}{p^2}}}$, soit –2,06 m,-0,75 m,-0,31 m,0 m,0,31 m,0,75 m,2,06 m.

- **4**- **a)** Question HORS PROGRAMME, calculatoire, et sans aucun intérêt pour le problème ici considéré. L'amplitude complexe diffractée dans la direction *i'* est donnée par l'expression de Fraunhofer : $\int_{\text{réseau}} \mathrm{e}^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\,\mathrm{d}y$ avec ici $\vec{k}\cdot\vec{r} = \frac{2\pi}{\lambda}y\sin i'$ pour tout point du réseau. Donc l'amplitude diffractée s'écrit $\sum_{n=0}^{N-1}\int_{np}^{np+l} \mathrm{e}^{+i\frac{2\pi}{\lambda}y\sin i'}\,\mathrm{d}y$ (à un facteur de phase près, affecté par la position exacte des fentes du réseau ; l'intensité, elle, n'en dépendra pas). Le calcul mène à une intensité (module de l'amplitude complexe au carré) égale à $N^2 l^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi}{\lambda}l\sin i'\right)\left(\frac{\sin\left(N\frac{\pi}{\lambda}p\sin i'\right)}{N\sin\left(\frac{\pi}{\lambda}p\sin i'\right)}\right)^2$.

❑ **4- b)** Question pour le moins curieuse : comment avoir des fentes de 4 μm avec un pas de 2 μm ? ? ? Disons seulement que la largeur finie du réseau contribue à l'élargissement des pics de diffraction, et que la largeur non nulle des fentes module la figure de diffraction par la fonction de diffraction d'une seule fente (le terme $\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi}{\lambda} l \sin i'\right)$), de sorte que tous les pics n'ont pas la même intensité.

❑ **4- c)** Les maxima d'intensité sont obtenus pour $\sin i' = m\frac{\lambda}{p}$ avec $m \in \mathbb{Z}$, comme au **2-**. Mais ils ne sont plus de largeur nulle. La largeur d'un pic est donnée par l'annulation du dénominateur $\sin\left(N\frac{\pi}{\lambda} p \sin i'\right)$, elle n'est donc pas la même pour tous les pics. Par exemple pour le pic central (correspondant à *i'* = 0), la largeur de la tache sur l'écran sera $2f'\frac{\lambda}{Np}$ soit 20 μm (au lieu d'un point).

❑ **5-** On part de $q_x^2 + q_y^2 = k^2$ mais maintenant q_x^2 est négatif. On arrive facilement à l'expression demandée avec $q_2 = 2\pi\frac{m}{p}$ et $q_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m^2}{p^2} - \frac{1}{\lambda^2}}$ ou encore $q_1 = \sqrt{4\pi^2\frac{m^2}{p^2} - k^2}$. L'onde est progressive dans la direction *Oy* et évanescente dans la direction *Ox*.

❑ **6-** Non observable dans le plan focal image de la lentille car c'est une observation à l'infini dans la direction *Ox* et que l'onde est évanescente dans cette direction.

❑ **7-** Vitesse de phase $\vec{v}_\varphi = \frac{\omega}{q_2}\vec{e}_y = \frac{\omega\, p}{2\pi\, m}\vec{e}_y = \frac{p}{m\lambda} c\,\vec{e}_y$.Or on est dans le cas où $|m| > \frac{p}{\lambda}$ donc la vitesse de phase (en norme) est plus petite que *c*. q_2 est fixé et indépendant de ω donc la vitesse de groupe $v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}q_2}$ peut être considérée comme infinie.

❑ **8-** On détermine $\vec{B}$ à partir de l'équation de Maxwell-Faraday $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ qui s'écrit en complexes $-i\vec{q} \wedge E_s\vec{e}_z = -i\omega\underline{\vec{B}}$. On en tire $\underline{\vec{B}}$ puis le champ magnétique $\vec{B}$ réel :

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{E_s}{\omega} q_2\, \mathrm{e}^{-q_1 x} \cos(\omega t - q_2 y) \\ -\frac{E_s}{\omega} q_1\, \mathrm{e}^{-q_1 x} \sin(\omega t - q_2 y) \\ 0 \end{cases} \text{ et on en déduit } \vec{\Pi} = \frac{E_s^2}{\mu_0 \omega} \mathrm{e}^{-2q_1 x} \begin{cases} q_1 \sin(\omega t - q_2 y)\cos(\omega t - q_2 y) \\ q_2 \cos^2(\omega t - q_2 y) \\ 0 \end{cases}.$$

❑ **9-** $\langle \rho_e \rangle = \frac{\varepsilon_0}{2}\langle \vec{E}_s^2 \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_s^2}{4}\mathrm{e}^{-2q_1 x}$; $\langle \rho_m \rangle = \frac{1}{2\mu_0}\langle \vec{B}^2 \rangle = \frac{E_s^2}{4\mu_0\omega^2}\left(q_1^2 + q_2^2\right)\mathrm{e}^{-2q_1 x}$. Ces deux grandeurs ne sont pas égales (au contraire de ce qu'on observe pour une OPP).

❑ **10-** Est-il demandé de démontrer $\operatorname{div}\vec{\Pi} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$? Sinon à quoi sert l'identité vectorielle fournie ? Des deux questions précédentes, on tire $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_s^2 q_2}{2\mu_0\omega}\mathrm{e}^{-2q_1 x}\,\vec{e}_y$ et $\langle \rho \rangle = \langle \rho_e \rangle + \langle \rho_m \rangle = \frac{E_s^2 q_2^2}{2\mu_0\omega^2}\mathrm{e}^{-2q_1 x}$ (en utilisant $-q_1^2 + q_2^2 = k^2$). On en déduit la vitesse de l'énergie $\vec{V}_e = \frac{\omega}{q_2}\vec{e}_y$, égale à la vitesse de phase.