Partie I - Circulation sanguine

1. • Volume sanguin = 5L
• Particule de fluide = élément de volume de fluide de taille mésoscopique ($1mm^3$ à $1\mu m^3$)
• Fluide incompressible = de masse volumique constante (indépendante de la pression)
• Ecoulement incompressible = pour lequel $div(\vec{v}) = 0$
• Ecoulement laminaire : particules de fluide gardant longtemps leur individualité, lignes de courant de forme stable pendant assez longtemps
• Ecoulement turbulent : fluctuations rapides du champ des vitesses, lignes de courant non stables dans le temps
• Nombre de Reynolds $R_e = \dfrac{transfert\ convectif}{transfert\ diffusif}$ de quantité de mouvement
Pour $R_e < R_{ec}$ écoulement laminaire, pour $R_e > R_{ec}$ écoulement turbulent.

2. Fluide incompressible donc $div(\vec{v}) = 0 = \dfrac{\partial v_z}{\partial z} \Rightarrow v_z$ est indépendante de z.
Symétrie cylindrique : invariance par rotation autour de Oz donc v_z ne dépend pas de θ.
Donc v_z ne dépend que de r.

3. Si on néglige la pesanteur, en régime permanent, l'équation de Navier-Stokes devient :

$$\rho(\vec{v}.\vec{grad})\vec{v} = -\vec{grad}\ p + \eta\Delta\vec{v}$$

Or $(\vec{v}.\vec{grad})\vec{v} = v_z\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial z} = 0$ car v_z est indépendante de z, d'où $\vec{grad}\ p = \eta\Delta\vec{v}$
En projection :
Sur $\vec{u}_r$ $\quad \dfrac{\partial p}{\partial r} = 0$: p ne dépend que de z et pas de r.
Sur $\vec{u}_z$ $\quad \dfrac{dp}{dz} = \eta\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}(r\dfrac{dv}{dr})$
Le premier terme ne dépend que de z, le second que de r donc ces termes sont égaux à une même constante k. On peut donc écrire :

$$\frac{dp}{dz} = k\ et\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dv}{dr}) = \frac{k}{\eta}$$

4. $\dfrac{dp}{dz} = k = \dfrac{P_e - P_s}{L} = -\dfrac{\Delta P}{L}$
On intègre une fois $\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}(r\dfrac{dv_z}{dr}) = \dfrac{k}{\eta}$ ce qui donne $r\dfrac{dv_z}{dr} = \dfrac{k}{2\eta}\ r^2 + A$
En r=0, $\dfrac{dv_z}{dr}$ reste finie donc $A = 0$. On intègre une seconde fois : $v_z = \dfrac{k}{4\eta}\ r^2 + B$
La condition aux limites en $v(r = R) = 0$ (principe d'adhérence) donne B d'où

$$v_z(r) = \frac{k}{4\eta}(r^2 - R^2) = \frac{P_s - P_e}{4\eta L}(R^2 - r^2)$$

5. $Q = \int\int \vec{v}.d\vec{S} = \int_0^R v_z(r)\ 2\pi r\ dr = \dfrac{\pi R^4\Delta P}{8\eta L}$
On obtient bien $Q = \dfrac{\Delta P}{R_H}$ avec $R_H = \dfrac{8\eta L}{\pi R^4}$
Unité : $M.L^{-1}.T^{-1}.L/L^4 = M.T^{-1}.L^{-4}$

6. n dépend de l'organe car
• les vaisseaux sanguins sont élastiques donc le rayon varie et la pression va dépendre de ce rayon.
• le sang n'est pas un fluide newtonien.

7. $< v_z >= \dfrac{Q}{\pi R^2} = \dfrac{R^2\Delta P}{8\eta L}$ A.N. $< v_z >= 2,77mm.s^{-1}$
$R_e = \dfrac{\rho v_z R}{\eta} = 5.10^{-3} << 2000$ donc l'écoulement est laminaire.

8. Pour une artère, $< v >= 2,6m.s^{-1}$ donc $Q = \pi R^2 < v >= 0,033L.s^{-1}$
$\Delta P = \dfrac{8\eta L}{R^2} < v >= 2,34.10^3 Pa$ et $R_e = 2340$: le régime est turbulent.

9. $\lambda = c/f = 0,375mm = 375\mu m >> r$. L'onde est diffractée par les globules rouges.

10. La sonde est fixe donc $f' = f|1 - \beta_r \cos\theta_r| = f(1 - \dfrac{v_r}{c}\cos\alpha)$

Le globule rouge réémet f" : $f" = \dfrac{f'}{(1+\frac{v_r}{c}\cos\alpha)} = f\dfrac{1-\frac{v_r}{c}\cos\alpha}{1+\frac{v_r}{c}\cos\alpha}$

Pour $v_r << c$, au premier ordre, on peut écrire $f" \simeq f(1-2\frac{v_r}{c}\cos\alpha)$ et $\Delta f = 2f\frac{v_r}{c}\cos\alpha$

D'où $v = -\dfrac{c}{2\cos\alpha}\dfrac{\Delta f}{f} = 0,65 m.s^{-1}$

11. On peut écrire $v = v_{max}(1-r^2/R^2) = \dfrac{c}{2\cos\alpha}\dfrac{\Delta f}{f}$

Donc $-df".\dfrac{c}{2\cos\alpha} = \dfrac{v_{max}}{R^2}2\pi r\ dr$

L'intensité est proportionnelle à dn : $dI = I_o dn = n_o I_o \dfrac{2\pi r\ dr}{\pi R^2}$

D'où $dI = -n_o I_o \dfrac{c}{2\pi f v_{max}\cos\alpha} df"$. On a un spectre linéaire.

12. La grandeur caractéristique de la diffusion sans dimension est $\dfrac{L^2}{Dt}$. On peut donc définir le temps de diffusion par $t = L^2/D$

En prenant une épaisseur des tissus de 10cm, on obtient en gros $t = 10^7 s = 2800 h = 4 mois$

Le sang transporte l'oxygène par adsorption sur l'hémoglobine.

13. $\delta t_s = \pi R_{alv}/v = 0,314 s$

temps de diffusion : $t = t_{air} + t_{aq} = 2R_{alv}^2/D_{air} + R_{cap}^2/D_{eau} = 0,1 s < \delta t_s$. L'échange a le temps de s'établir.

14. γ en $(mol.m^{-2}.s^{-1})/(mol.m^{-3})$ donc en $m.s^{-1}$

Conservation de la matière en régime stationnaire :

$C_c(z)\pi R^2 dt - C_c(z+dz)\pi R^2 dt = 2\pi R\gamma dz(C_c - C_{org})dt$ d'où

$$\frac{dC_c}{dz} = -(C_c - C_{org})\frac{2\gamma}{vR}$$

15. Si $C_{org} = K =$ constante, on obtient $C_c(z) = K + (C_c(0)-K)e^{-z/L_o}$

On veut $|\dfrac{C_c(L)-K}{C_c(0)-K}| > 30\%$ donc $L < L_o \ln(1/0,3) \Rightarrow \gamma < \dfrac{Rv}{2L}\ln(1/0,3)$

A.N. $\gamma_{max} = 1,68.10^{-5} m.s^{-1}$

Partie II - Technique exploratrice

16. • Equation d'Euler : $(\mu_o + \delta\mu)(\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{grad})\vec{v}) = (\mu_o+\delta\mu)\vec{g} - \vec{grad}(P_o + p)$

Or à l'équilibre $\mu_o\vec{g} - \vec{grad}P_o = \vec{0}$ et les termes $\delta\mu\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t}$ et $(\vec{v}.\vec{grad})\vec{v})$ sont des ordres 2.

Il reste au premier ordre : $\mu_o\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \delta\mu\vec{g} - \vec{grad}(p)$ (1)

• Conservation de la masse (au premier ordre) : μ_o div $\vec{v} + \dfrac{\partial\mu}{\partial t} = 0$ (2)

• Compressibilité isentropique : $\chi_s = \dfrac{1}{\mu_o}\dfrac{\partial\mu}{\partial P}$ (3)

17. On néglige $\delta\mu\vec{g}$ devant $\vec{grad}(p)$ donc en prenant la divergence de (1), on a div$(\mu_o\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t}) = -\Delta p = \mu_o\dfrac{\partial}{\partial t}$ div$(\vec{v}) = \dfrac{\partial}{\partial t}(-\dfrac{\partial\mu}{\partial t})$

(3) donne $\dfrac{\partial\mu}{\partial t} = \mu_o\chi_s\dfrac{\partial p}{\partial t}$. D'où

$$\Delta p - \mu_o\chi_s\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

La célérité est $c_o = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_o\chi_s}}$

18. Avec $\underline{p}(x,t) = p_m e^{j(kx-\omega t)}$, (1) devient $-jk\underline{p}\vec{u}_x = -\mu_o j\omega\underline{v}\vec{u}_x$. Or $k = \omega/c_o$

On définit l'impédance acoustique : $Z = \dfrac{p(x,t)}{v(x,t)} = \mu_o c_o$

19. $I =< px,t)v(x,t) >= \dfrac{p_m^2}{2Z} = \dfrac{p_m^2}{2\mu_o c_o}$

D'après (2) $j\omega\delta\underline{\mu} = \mu_o jk\underline{v}$ donc $\delta\mu_m = p_m/c_o^2$

$\dfrac{g\delta\mu_m}{||\vec{grad}p||} = \dfrac{gp_m/c_o^2}{kp_m} = \dfrac{g}{c_o\omega}$

20. $p_m = \sqrt{2\mu_o c_o I} = 17,15 Pa$, $p_m/P_o = 1,7.10^{-4} << 1$

• $\dfrac{v_m}{c_o} = \dfrac{p_m}{\mu_o c_o^2} = 7,9.10^{-9} << 1$

• $\delta\mu_m = \dfrac{p_m}{c_o^2} = 7,9.10^{-6} kg.m^{-3}$, $\dfrac{\delta\mu_m}{\mu_o} = 7,9.10^{-9} << 1$. On remarque que $p_m/P_o = \delta\mu_m/\mu_o$

• $\chi_s = \dfrac{1}{\mu_o c_o^2} = 4,6.10^{-10} Pa^{-1}$

• $g\delta\mu_m = 7,9.10^{-8} kg.m^2.s^{-2}$ et $||\vec{grad}p||_m = kp_m = \omega p_m/c_o = 21980 kg.m^2.s^{-2} >> g\delta\mu_m$

Toutes les hypothèses sont bien vérifiées.

21. $l = t_A c_{eau}$ et $t_p = \dfrac{l-\delta)}{c_{eau}} + \dfrac{\delta}{c_{os}} = t_A + \delta(\dfrac{1}{c_{os}} - \dfrac{1}{c_{eau}})$

$\tau = t_A - t_p = \delta(\dfrac{1}{c_{eau}} - \dfrac{1}{c_{os}})$ d'où $c_{os} = \dfrac{c_{eau}}{1 - \tau c_{eau}/\delta} = 1574,5 m.s^{-1}$

22. $I_R = T^2 I_E e^{-\alpha\delta} = T^2 I_E e^{-Vf\delta}$

23. La relation précédente s'écrit $\ln(\dfrac{I_R}{I_E}) = 2\ln(T) - Vf\delta$. Par régression linéaire, $\ln(\dfrac{I_R}{I_E})$ est bien une droite en fonction de f dont la pente donne $V = 174,2.10^{-6} s.m^{-1}$ (le second point n'est pas aligné avec les autres...)

24. On admet $Z_{os} = C_{os}\mu_{os}$ bien que l'os ne soit pas un fluide.

On obtient avec l'ordonnée à l'origine de la droite précédente $2\ln(T) = -0,148$ donc

$T = 0,929 = \dfrac{4Z_{os}Z_{eau}}{(Z_{os} + Z_{eau})^2}$

On résout cette équation du second degré en Z_{os}.

On obtient $\mu_{os} = 1614 kg.m^{-3}$ ou $\mu_{os} = 539 kg.m^{-3}$. Manifestement la première valeur est la bonne et correspond à un sujet atteint de perte de densité osseuse.

$\ln(T) = \ln(4) + \ln(Z_{os}) + \ln(Z_{eau}) - 2\ln(Z_{os} + Z_{eau})$

D'où $\dfrac{\Delta T}{T} = |\dfrac{Z_{eau} - Z_{os}}{Z_{eau} + Z_{os}}|\dfrac{\Delta Z_{os}}{Z_{os}} = |\dfrac{Z_{eau} - Z_{os}}{Z_{eau} + Z_{os}}|\dfrac{\Delta\mu_{os}}{\mu_{os}}$

Alors $\dfrac{\Delta\mu_{os}}{\mu_{os}\Delta T} = \dfrac{(Z_{eau} + Z_{os})^3}{4Z_{eau}Z_{os}(Z_{os} - Z_{eau})} = 3130$