ECOLE POLYTECHNIQUE

OPTION M'

CONCOURS D'ADMISSION 1991

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

Les deux premières parties de ce problème sont consacrées à l'étude de certains opérateurs linéaires (expression synonyme de « endomorphismes d'espaces vectoriels »), d'un point de vue algébrique et, dans une moindre mesure, géométrique ; dans la troisième partie, on étudie des opérateurs linéaires assez voisins, mais d'un point de vue analytique.

On note AB l'opérateur $A \circ B$, A et B étant deux opérateurs linéaires dans un espace vectoriel E. De même, on note $A\phi$ l'image d'un vecteur ϕ de E par l'opérateur linéaire A.

PARTIE I

On fixe un nombre complexe ν ; on désigne par E un espace vectoriel complexe admettant une base (ϕ_n), $n \in \mathbf{Z}$; et A, B_ν, C_ν, D_ν les opérateurs linéaires dans E définis comme suit :

$$A\phi_n = 2\,i\,n\,\phi_n$$

$$B_\nu\phi_n = (\nu + 1 + 2\,n)\,\phi_{n+1}$$

$$C_\nu\phi_n = (\nu + 1 - 2\,n)\,\phi_{n-1}$$

$$D_\nu = B_\nu + C_\nu \quad .$$

On pourra admettre le résultat suivant : tout sous-espace vectoriel de E, invariant par A, est somme directe de certains sous-espaces $\mathbf{C}\phi_n$. On se propose de déterminer les sous-espaces vectoriels de E, invariants par les trois opérateurs A, B_ν, C_ν, et minimaux, c'est-à-dire ne contenant strictement aucun sous-espace vectoriel non nul invariant par ces trois opérateurs.

1. Calculer les commutateurs $[A, B_\nu]$, $[A, C_\nu]$, $[A, D_\nu]$.

(On rappelle que $[A, B_\nu] = AB_\nu - B_\nu A$, etc.)

2. Démontrer les résultats suivants :

a - si ν n'est pas un entier impair, E n'admet aucun sous-espace vectoriel (sous-entendu : distinct de $\{0\}$ et de E) invariant par A, B_ν, C_ν ;

b - si $\nu = -2m - 1$, $m \in \mathbf{N}$, E admet un unique sous-espace vectoriel invariant minimal, à savoir le sous-espace vectoriel E^0 engendré par $\phi_{-m}, ..., \phi_m$;

c - si $\nu = 2m + 1$, $m \in \mathbf{N}$, E admet exactement deux sous-espaces vectoriels invariants minimaux que l'on déterminera.

3. Déterminer les opérateurs linéaires dans E commutant avec A, B_ν et C_ν.

Tournez la page S.V.P.

PARTIE II

On suppose $\nu = -2m - 1$, $m \in \mathbf{N}$; on note A^0, B^0_ν, C^0_ν, D^0_ν les restrictions de A, B_ν, C_ν, D_ν à E^0.

1. A quoi sont égaux A^0, B^0_ν, C^0_ν, D^0_ν lorsque $\nu = -1$?

On suppose dorénavant $\nu \neq -1$.

2. On note $(\,|\,)$ le produit scalaire complexe sur E^0 pour lequel la base $(\phi_{-m}, \ldots, \phi_m)$ est orthonormale ; on fixe un opérateur linéaire T dans E^0, hermitien pour ce produit scalaire, et inversible ; on dit qu'un opérateur linéaire S dans E_0 est *antihermitien relativement à* T s'il vérifie $TS + S^*T = 0$, où S^* désigne l'adjoint de S. Etablir les résultats suivants :

a - Pour que A^0 soit antihermitien relativement à T, il faut et il suffit que la matrice de T sur la base $(\phi_{-m}, \ldots, \phi_m)$ soit diagonale.

b - Pour que A^0 et D^0_ν soient antihermitiens relativement à T, il faut et il suffit, outre la condition précédente, que l'on ait

$$(T\phi_n \,|\, \phi_n) = k(-1)^n \frac{(m+n)!}{2m(2m-1)\ldots(m+1-n)}$$

où k est une constante.

c - Si ces conditions sont remplies, $i(B^0_\nu - C^0_\nu)$ est aussi antihermitien relativement à T.

On suppose maintenant vérifiées les conditions ci-dessus ; on prend $m = 1$, donc $\nu = -3$; on définit T par :

$$(T\phi_1 \,|\, \phi_1) = (T\phi_{-1} \,|\, \phi_{-1}) = 1 \quad , \quad (T\phi_0 \,|\, \phi_0) = -\frac{1}{2}$$

On munit E^0 de la nouvelle base suivante :

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + \phi_{-1}) \quad , \quad \psi_2 = \sqrt{2}\,\phi_0 \quad , \quad \psi_3 = \frac{i}{\sqrt{2}}(\phi_1 - \phi_{-1})$$

On désigne par E^0_r le sous-espace vectoriel réel engendré par ces vecteurs, et on considère un vecteur x, élément de E^0_r, défini par :

$$x = x_1\psi_1 + x_2\psi_2 + x_3\psi_3$$

3. Calculer $(Tx \,|\, x)$.

4. Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(t) = (T\,e^{tA^0}x \,|\, e^{tA^0}x)$$

$$e^{tA^0} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n (A^0)^n}{n!}$$

Que peut-on dire de f(t) ?

5. Décrire l'ensemble des éléments $e^{tA^0}x$ lorsque t décrit $\mathbf{R}$, x restant fixé.

6. Même question pour $e^{tD^0_\nu}x$.

A SUIVRE

PARTIE III

On fixe un nombre réel $a > 0$. On définit une application u_a de $\mathbf{R}$ dans lui-même de la façon suivante :

– si $\theta \in \mathbf{R}$ est de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$, alors $u_a(\theta) = \theta$

– si θ appartient à un intervalle $\left]\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right[$, alors $u_a(\theta)$ appartient au même intervalle, et $\tan(u_a(\theta)) = a \tan\theta$.

1. Montrer que l'application u_a est un difféomorphisme de classe C^∞ et que :

$$\frac{du_a}{d\theta} = \frac{a}{a^2 + (1 - a^2)\cos^2\theta} .$$

Pour tout entier $r \geq 0$ on désigne par F^r l'espace des fonctions complexes sur $\mathbf{R}$, de classe C^r et périodiques de période π. On fixe un nombre complexe ν ; pour tout $f \in F^r$ et tout réel t, on pose

$$(U_t f)(\theta) = \left(\frac{du_a}{d\theta}\right)^{\frac{\nu+1}{2}} f(u_a(\theta))$$

où $a = e^t$; il est clair que U_t est un opérateur linéaire dans F^r.

2. Dire pour quelles valeurs de ν les opérateurs U_t sont unitaires dans F^r en ce sens que l'on a

$$\int_0^\pi |(U_t f)(\theta)|^2 \, d\theta = \int_0^\pi |f(\theta)|^2 \, d\theta$$

pour toute $f \in F^r$. [On pourra examiner d'abord le cas où $r = 0$.]

3. On suppose $r > 0$. Calculer la dérivée par rapport à t, pour $t = 0$, de $(U_t f)(\theta)$, que l'on notera $(U^0 f)(\theta)$; il est clair que U^0 est un opérateur linéaire dans l'espace F^∞, intersection de tous les F^r.

4. Dire pour quelles valeurs de ν l'opérateur U^0 est antihermitien en ce sens que l'on a :

$$\int_0^\pi \overline{g(\theta)}\,(U^0 f)(\theta)\, d\theta + \int_0^\pi \overline{(U^0 g)(\theta)}\, f(\theta)\, d\theta = 0 \qquad \forall f,g \in F^\infty$$

5. Etablir, en utilisant les fonctions $\phi_n(\theta) = e^{2in\theta}$, une relation entre U^0 et l'opérateur D_ν de la partie I.

♦ ♦
♦

FIN