ECOLE POLYTECHNIQUE

OPTION M'

CONCOURS D'ADMISSION 1993

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

L'objectif de ce problème est de déterminer le nombre de composantes connexes par arcs des complémentaires de certaines courbes planes.

On désigne par $\mathbb{C}$ le plan complexe et par f une fonction d'une variable réelle de classe C^1 à valeurs dans $\mathbb{C}$ ayant les propriétés suivantes :

(i) f est périodique (on note T sa plus petite période)

(ii) si $f(s) = f(t)$, alors $s - t$ est un multiple entier de T

(iii) $f'(t) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

On notera Γ la courbe image de f et $\mathbb{C} \backslash \Gamma$ son complémentaire dans $\mathbb{C}$.

I

1.a) Construire une fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 et telle que la fonction $g = f \circ \varphi$ ait les propriétés suivantes :

(i) g est périodique (on note L sa plus petite période)

(ii) si $g(s) = g(t)$, alors $s - t$ est un multiple entier de L

(iii) $|g'(t)| = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

b) Quelle est la signification géométrique de L ?

c) Quelles relations y a-t-il entre deux telles fonctions φ ?

A partir de maintenant on considèrera uniquement la fonction g.

II

2) On fixe un point z dans $\mathbb{C} \backslash \Gamma$; en étudiant les extrema de la fonction $t \mapsto |z - g(t)|^2$, démontrer qu'il existe au moins deux points distincts de Γ, soient $g(t_1)$ et $g(t_2)$, tels que la droite passant par z et par $g(t_i)$ soit orthogonale au vecteur $g'(t_i)$ pour $i = 1, 2$.

3) On fixe un nombre réel $K \in \,]0, 1[$. Démontrer qu'il existe un nombre réel $\alpha \in \,]0, L/2[$ tel que :

a)
$$(s, t) \in \mathbb{R}^2, \quad |s - t| < \alpha \Rightarrow |g'(s) - g'(t)| < K \quad .$$

b)

$(s, t) \in \mathbb{R}^2, \quad 0 < |s-t| < \alpha \Rightarrow |g(s) - g(t) - (s-t)g'(t)| < K|s-t| \quad .$

Le nombre α est ainsi choisi dans toute la suite.

4) On note β la borne inférieure des nombres $|g(s) - g(t)|$ pour tous les couples $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant

$$|s - t + nL| \geqslant \alpha \qquad \forall n \in \mathbb{Z} \quad .$$

Montrer que β est strictement positif.

5) Pour tout réel $\varepsilon \in \,]0, \beta[$ on définit deux courbes Γ_ε^+ et Γ_ε^- par les paramétrages

$$g_\varepsilon^\pm(t) = g(t) \pm i\,\varepsilon g'(t) \quad .$$

Déterminer les intersections de Γ_ε^+ et Γ_ε^- avec Γ.

Dans ce qui suit, on fixe un réel $\varepsilon \in \,]0, \beta[$ et on pose

$$z^\pm = g_\varepsilon^\pm(0) \quad .$$

On appelle *arc* toute application continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}$.

6) Démontrer que tout point de $\mathbb{C} \backslash \Gamma$ peut être joint à au moins l'un des points z^+, z^- par un arc contenu dans $\mathbb{C} \backslash \Gamma$.

III

Dans les questions 7) à 10) on se propose de démontrer qu'il n'existe pas d'arc joignant z^+ à z^- et contenu dans $\mathbb{C} \backslash \Gamma$; procédant par l'absurde, on suppose qu'il existe un tel arc que l'on note γ.

7) Soient h une application de classe C^1 de $[0, L]$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant $|h(t)| = 1$ pour tout t, et a un nombre réel vérifiant $h(0) = e^{ia}$. Construire, à l'aide d'une intégrale portant sur $\dfrac{h'(t)}{h(t)}$, une fonction réelle k, de classe C^1, telle que

$$\forall t \in [0, L] \qquad h(t) = e^{ik(t)} \quad \text{et} \quad k(0) = a \quad .$$

Démontrer l'unicité de k.

8) Pour tout $s \in [0, 1]$ on définit une application h_s de $[0, L]$ dans $\mathbb{C}$ par

$$h_s(t) = \frac{g(t) - \gamma(s)}{|g(t) - \gamma(s)|}$$

et on choisit un réel a_s vérifiant $h_s(0) = e^{ia_s}$ et dépendant continûment de s ; on note k_s la fonction associée à h_s et a_s comme à la question 7).

Enfin, on pose :

$$n_s = k_s(L) - k_s(0) \quad .$$

Exprimer n_s à l'aide d'une intégrale portant sur g, g' et γ ; exprimer ensuite n_0 et n_1 à l'aide d'intégrales portant sur g, g' et ε.

9.a) Démontrer que lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0+$, les expressions

$$\int_{\alpha}^{L-\alpha}\left(\frac{g'(u)}{g(u)-g(0)-i\,\varepsilon g'(0)}-\frac{g'(u)}{g(u)-g(0)+i\,\varepsilon g'(0)}\right)du$$

et

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\left(\frac{g'(u)}{g(u)-g(0)-i\,\varepsilon g'(0)}-\frac{g'(u)}{g(u)-g(0)+i\,\varepsilon g'(0)}\right)du$$

ont pour limites respectives 0 et $2i\pi$.

b) En déduire la valeur de $n_0 - n_1$.

10) Démontrer que n_s est indépendant de s. Conclure.

11.a) Déterminer le nombre des composantes connexes par arcs de $\mathbb{C}\backslash\Gamma$.

b) Déterminer le nombre de celles de ces composantes qui sont bornées.

[On rappelle que, si X est une partie de $\mathbb{C}$, les composantes connexes par arcs de X constituent une partition de X ayant la propriété suivante : deux points de X peuvent être joints par un arc si et seulement s'ils appartiennent à une même composante connexe par arcs].