DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

♦

Les deux parties de ce problème sur les courbes planes peuvent être traitées indépendamment ; la première porte sur les notions d'abscisse curviligne et de courbure ; la seconde introduit et étudie des notions qui leur ressemblent, mais qui sont invariantes par un groupe de transformations plus grand que le groupe des déplacements.

On désigne par E l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^2$, par $(\cdot|\cdot)$ son produit scalaire, par $\|\cdot\|$ la norme correspondante, par x_1 et x_2 les composantes d'un vecteur x dans la base canonique ; enfin, pour $x, y \in E$ on pose

$$x \wedge y = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

L'espace E sera aussi muni de sa structure de plan affine et pourra être identifié au plan complexe $\mathbb{C}$

I

On désigne par R la rotation dans E d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. On se donne un intervalle ouvert non vide I de $\mathbb{R}$, une application continue γ de I dans $]0, +\infty[$, un élément t^0 de I et un élément τ^0 de E de norme 1.

1) Démontrer qu'il existe une unique application τ, de classe C^1, de I dans E vérifiant

$$\forall t \in I, \tau'(t) = \gamma(t) R\left(\tau(t)\right) \text{ et } \tau\left(t^0\right) = \tau^0.$$

2) Vérifier que $\|\tau(t)\| = 1$.

3) Soit x^0 un point de E ; on définit la courbe $x : I \to E$ par :

$$x(t) = x^0 + \int_{t^0}^{t} \tau(u)\ \mathrm{d}\,u.$$

Déterminer sa courbure $C(t)$ au point $x(t)$.

4) *Application :* On prend $I =]0, +\infty[$, $\gamma(t) = t^{-1}$, $t^0 = 1$, $\tau^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Calculer explicitement $\tau(t)$ puis $x(t)$; reconnaître la courbe obtenue.

II

On se donne un intervalle I de $\mathbb{R}$ et on se propose d'étudier les courbes $x : I \to E$, de classe C^3 et satisfaisant la relation

$$(\mathcal{R}) \qquad \forall t \in I \quad x'(t) \wedge x''(t) = 1.$$

5) On suppose vérifiée la relation $(\mathcal{R})$; on fait un changement de paramètre $t \mapsto \varphi(t)$ où φ est un difféomorphisme de classe C^∞ de I sur un intervalle J ; on suppose que la courbe $u \mapsto x\left(\varphi^{-1}(u)\right)$ vérifie aussi la relation $(\mathcal{R})$. Que peut-on dire de φ ?

6) On se donne une courbe $x : I \to E$, de classe C^3 et telle que

$$\forall t \in I \quad x'(t) \wedge x''(t) > 0.$$

Construire un changement de paramètre φ tel que la courbe $u \mapsto x\left(\varphi^{-1}(u)\right)$ vérifie la relation $(\mathcal{R})$.

À partir de maintenant, on supposera vérifiée la relation $\mathcal{R}$ et on posera

$$\chi(t) = x''(t) \wedge x'''(t).$$

7) Exprimer $x'''(t)$ en fonction de $x'(t)$ et de $\chi(t)$.

8) On donne une fonction continue $\rho : I \to \mathbb{R}$ un point t^0 de I, et trois éléments a, b, c de E vérifiant $b \wedge c = 1$.

Montrer qu'il existe une unique application x de classe C^3 de I dans E vérifiant

$$x'(t) \wedge x''(t) = 1$$
$$x''(t) \wedge x'''(t) = \rho(t)$$
$$x\left(t^0\right) = a, x'\left(t^0\right) = b, x''\left(t^0\right) = c.$$

[On pourra poser $y(t) = x'(t)$]

9) *Application :* On prend $I =]0, +\infty[$, $t^0 = 1$, $a = \begin{pmatrix} 1 \\ \overline{20} \\ 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ \overline{5} \\ -1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 3 \\ \overline{5} \\ 2 \end{pmatrix}$, $\rho(t) = -6t^{-2}$.

Calculer explicitement $x(t)$.

10) Soit x une application dc classe C^3 vérifiant $(\mathcal{R})$; on suppose en outre que $I = \mathbb{R}$ et que $\chi(t)$ est une constante notée χ. Préciser la nature de la courbe $t \mapsto x(t)$ suivant que $\chi > 0$, $\chi = 0$, $\chi < 0$.

11) Dans toute la suite, on désigne par G l'ensemble des transformations F de E de la forme

$$F(x) = U(x) + V, \forall x \in E$$

où

$$U \in \operatorname{End} E, \det U = 1, V \in E.$$

Vérifier que G est un groupe ; écrire les produits et les inverses de ses éléments.

12) Étant données une courbe $x : I \to E$ vérifiant $(\mathcal{R})$ et une transformation F appartenant à G, que peut-on dire de la courbe $X = F \circ x$?

13) On considère deux courbes x et X, définies sur I, vérifiant $(\mathcal{R})$ et possédant la même fonction χ. Construire une transformation F appartenant à G telle que $X = F \circ x$.

14) On considère une courbe $x : I \to E$, de classe C^4, et vérifiant $(\mathcal{R})$, un point t^0 de I et on pose $\chi^0 = \chi(t^0)$. On prend une nouvelle base de E formée des vecteurs $x'(t^0)$, $x''(t^0)$; on note $\bar{x}_1(t)$ et $\bar{x}_2(t)$ les composantes de $x(t)$ sur cette base.

Écrire le développement limité à l'ordre 4 de $\bar{x}_2(t)$ en fonction de $\bar{x}_1(t)$ au voisinage de t^0.