Dans tout ce problème on fixe un entier strictement positif N ; on désigne par $(e_1, \dots, e_N)$ la base naturelle de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^N$; on munit ce dernier du produit scalaire usuel $(x \mid y) = \sum_n \bar{x}_n y_n$ et de la norme correspondante $\|x\| = (x \mid x)^{1/2}$. On considère chaque vecteur x de $\mathbb{C}^N$ comme une matrice colonne et on note ${}^t x$ la matrice ligne correspondante, de sorte que l'on a $(x \mid y) = {}^t\bar{x}\, y$.

On désigne par $M(N, \mathbb{C})$ l'ensemble des matrices complexes à N lignes et N colonnes, et par ${}^tA$ la transposée d'une matrice A, par E le sous-espace vectoriel des matrices symétriques et par E_0 l'espace vectoriel réel des matrices symétriques réelles.

I

1. Déterminer la dimension de E.

2. On fixe une base orthonormée $(v_1, \dots, v_N)$ de $\mathbb{C}^N$; pour tout couple (i, j) avec $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, N$, $i \leq j$, on pose

$$B_{ij} = v_i\, {}^tv_j + v_j\, {}^tv_i \quad .$$

a) Calculer $B_{ij}\, \bar{v}_k$.

b) Montrer que les matrices B_{ij} forment une base de E.

II

Dans cette partie on fixe une matrice M de $M(N, \mathbb{C})$ et on définit un endomorphisme $\hat{M}$ de E par $\hat{M}(B) = {}^tM B + B M$ pour tout $B \in E$. On choisit une base orthonormée $(v_1, \dots, v_N)$ de $\mathbb{C}^N$ telle que, pour tout i, ${}^tM v_i$ soit de la forme

$${}^tM v_i = \sum_j \mu_{ij} v_j$$

où les μ_{ij} sont des nombres complexes et $\mu_{ij} = 0$ si $j < i$ (on admettra qu'il existe toujours une telle base).

On définit les matrices B_{ij} comme au **2**.

3. Exprimer les nombres μ_{ii} en fonction des valeurs propres de M.

4. Vérifier que, pour tout k et tout l, la composante X_{ijkl} de $\hat{M}(B_{ij})\, \bar{v}_k$ sur v_l est égale à $\delta_{jk}\, \mu_{il} + \delta_{ik}\, \mu_{jl} + \delta_{il}\, \mu_{jk} + \delta_{jl}\, \mu_{ik}$, où $\delta_{ii} = 1$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

5.a) Montrer que $\hat{M}(B_{ij})$ est de la forme

$$\hat{M}(B_{ij}) = \sum_{k \leq l} \alpha_{ijkl} B_{kl}$$

où les α_{ijkl} sont des nombres complexes que l'on explicitera en fonction des X_{ijkl},

b) Montrer que, si α_{ijkl} est non nul, alors on a ou $k+l > i+j$, ou $i = k$, $j = l$ et $\alpha_{ijij} = \mu_{ii} + \mu_{jj}$.

6.a) Définir, sur l'ensemble des couples (i,j) vérifiant $i \leq j$, une relation d'ordre total, notée $(i,j) \leq (k,l)$, telle que l'on ait $\alpha_{ijkl} = 0$ dès que $(i,j) > (k,l)$.

b) Déterminer les valeurs propres de $\hat{M}$.

III

Pour toute matrice $M \in M(N, \mathbb{R})$, ensemble des matrices réelles à N lignes et N colonnes, et tout vecteur $a \in \mathbb{R}^N$, on note

$$t \mapsto X(M, a, t)$$

l'unique solution à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ du système différentiel

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} X(t) = M\,X(t) \\ X(0) = a \quad . \end{cases}$$

Pour toute matrice $B \in E_0$, on désigne par Φ_B la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^N$ définie par

$$\Phi_B(x,y) = {}^t x\, B\, y$$

et par Q_B la forme quadratique correspondante. On dit que B est *définie positive* si l'on a $Q_B(x) > 0$ pour tout x non nul, et *définie négative* si $-B$ est définie positive.

7. Vérifier que l'on a

$$\frac{d}{dt} Q_B(X(M,a,t)) = Q_{\hat{M}(B)}(X(M,a,t)) \quad .$$

8. On suppose que toutes les valeurs propres de M ont une partie réelle strictement négative ; on admet que, dans ce cas, on a $\lim_{t \to +\infty} X(M, a, t) = 0$ pour tout a.

a) Montrer que, si $B \in E_0$ et si $\hat{M}(B)$ est définie négative, alors B est définie positive.

b) Démontrer l'existence d'une matrice B de E_0, définie positive et vérifiant $\hat{M}(B) = -I$.

9. On suppose qu'il existe une matrice B définie positive telle que $\hat{M}(B)$ soit définie négative. On se propose de démontrer que toutes les valeurs propres de M ont des parties réelles strictement négatives.

a) Montrer qu'il existe un réel $k > 0$ tel que l'on ait $k\, Q_B(x) \leqslant -Q_{\hat{M}(B)}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

b) Déterminer la limite de $X(M, a, t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

c) Conclure.

10. Supposant $N = 2$, construire explicitement une matrice M dont toutes les valeurs propres ont des parties réelles strictement négatives et une matrice B définie positive telles que $\hat{M}(B)$ ne soit pas définie négative.