PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

⋆⋆⋆

Première partie

Dans cette première partie, on désigne par α un entier ≥ 2 et par β un réel > 1.

1. a) Vérifier que la formule

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2\pi\alpha^n x)}{\beta^n}$$

définit une fonction continue périodique de période 1.

b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout entier $k < \dfrac{\ln\beta}{\ln\alpha}$.

2. Calculer les coefficients de Fourier de f.

3. Démontrer la réciproque de 1.b).

Dans toute la suite on désigne par (e_1, e_2) la base naturelle de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, par x_1 et x_2 les coordonnées d'un vecteur x de $\mathbb{R}^2$, par $\mathbb{Z}^2$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ formé des vecteurs à coordonnées entières ; enfin par $\mathcal{C}^k_{per}$ pour k entier positif ou nul, l'espace des fonctions f sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs complexes, de classe $\mathcal{C}^k$ et vérifiant $f(x+p) = f(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}^2$ et tout p dans $\mathbb{Z}^2$.

Deuxième partie

On désigne par G le groupe des transformations $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^2$, linéaires, bijectives et vérifiant $\mathcal{A}(\mathbb{Z}^2) \subset \mathbb{Z}^2$ et $\mathcal{A}^{-1}(\mathbb{Z}^2) \subset \mathbb{Z}^2$; puis par G_0 le sous-groupe de G formé des transformations de déterminant 1.

1. Caractériser les matrices représentant les éléments de G_0 dans la base (e_1, e_2).

2. Quelles sont les valeurs prises par $\det\mathcal{A}$ lorsque $\mathcal{A}$ parcourt G ?

3. Étant donné un élément $\mathcal{A}$ de G_0 vérifiant $|\mathrm{tr}\,(\mathcal{A})| > 2$ (où $\mathrm{tr}\,(\mathcal{A})$ désigne la trace de $\mathcal{A}$), que peut-on dire des valeurs propres de $\mathcal{A}$?

Troisième partie

Aucune difficulté théorique ne sera soulevée à propos de la notion d'intégrale double.

Pour tout vecteur $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{Z}^2$, on note Δ_p le sous-ensemble $[p_1, p_1+1[\times [p_2, p_2+1[$ de $\mathbb{R}^2$. On fixe un élément $\mathcal{A}$ de G_0 et on se propose de démontrer la relation

$$\iint_{\Delta_0} f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = \iint_{\mathcal{A}(\Delta_0)} f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \qquad (1)$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0_{per}$.

Pour tout $p \in \mathbb{Z}^2$ on pose $U_p = \Delta_p \cap \mathcal{A}(\Delta_0)$ et $T_p = U_p - p$ (ensemble des éléments $x - p$ où $x \in U_p$).

1. Déterminer et représenter graphiquement les ensembles U_p et T_p dans le cas où $\mathcal{A}$ correspond à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Vérifier que $\mathcal{A}(\Delta_0)$ et Δ_0 sont respectivement réunions disjointes des ensembles U_p et T_p.

3. Démontrer la relation (1).

Quatrième partie

Dans toute la suite du problème on fixe un élément $\mathcal{A}$ de G_0 tel que $|\mathrm{tr}\,(\mathcal{A})| > 2$, un nombre réel $b > 1$, une fonction φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ appartenant à $\mathcal{C}^0_{per}$, et on se propose d'étudier les fonctions $\psi \in \mathcal{C}^0_{per}$ satisfaisant l'équation

$$b\psi - \psi \circ \mathcal{A} = \varphi \tag{2}$$

On note a la valeur propre de $\mathcal{A}$ vérifiant $|a| > 1$.

1. Vérifier que la formule

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} b^{-n-1} \varphi \circ \mathcal{A}^n$$

définit un élément de $\mathcal{C}^0_{per}$ solution de (2).

2. Étudier l'unicité de la solution de (2) dans $\mathcal{C}^0_{per}$.

3. Montrer que ψ est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k < \dfrac{\ln b}{\ln |a|}$.

[On pourra introduire une base de $\mathbb{R}^2$ diagonalisant $\mathcal{A}$

Cinquième partie

Pour toute fonction f de $\mathcal{C}^0_{per}$ on définit une fonction complexe $\hat{f}$ sur $\mathbb{Z}^2$ par

$$\hat{f}(p_1, p_2) = \iint_{\Delta_0} f(x_1, x_2) \exp\left(-2\pi i (p_1 x_1 + p_2 x_2)\right) dx_1\, dx_2.$$

On admettra que, pour toute partie finie X de $\mathbb{Z}^2$, on a

$$\sum_{(p_1,p_2)\in X} \left|\hat{f}(p_1,p_2)\right|^2 \leq \iint_{\Delta_0} |f(x_1,x_2)|^2 \, dx_1\, dx_2.$$

1. Démontrer la relation

$$\widehat{f \circ \mathcal{A}} = \hat{f} \circ D$$

où D est l'inverse de l'adjoint de $\mathcal{A}$ pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^2$.

*On définit la fonction ψ comme au **10.**, en supposant en outre que $\varphi(x_1, x_2 = \cos 2\pi x_1)$.*

2. Calculer $\hat{\varphi}$, puis $\hat{\psi}\left(D^{-n}(e_1)\right)$ lorsque n est un entier positif ou nul.

3. Soit k_1 et k_2 deux entiers positifs ou nuls. Montrer que la somme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(D^{-n}(e_1)_1\right)^{2k_1} \left(D^{-n}(e_1)_2\right)^{2k_2} \left|\hat{\psi}\left(D^{-n}(e_1)\right)\right|^2$$

(où $D^{-n}(e_1)_1$ et $D^{-n}(e_1)_2$ désignent les deux composantes de $D^{-n}(e_1)$) est finie si et seulement si $k_1 + k_2 < \dfrac{\ln b}{\ln |a|}$.

[On pourra introduire une base de $\mathbb{R}^2$ diagonalisant D.]

4. Pour quels entiers k la fonction ψ est-elle de classe $\mathcal{C}^k$?