ÉCOLE POLYTECHNIQUE **FILIÈRE MP**

CONCOURS D'ADMISSION 2003

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

$\star\star\star$

Propriétés asymptotiques des solutions d'une équation différentielle

On désigne par

- E l'espace vectoriel des fonctions complexes continues bornées sur l'intervalle $J = [1, +\infty[$, muni de la norme $f \mapsto \|f\| = \sup\limits_{t \in J} |f(t)|$;
- $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes continus de E, muni de la norme
$$A \mapsto \|A\| = \sup_{\|f\|=1} \|A(f)\| \ ;$$
- I_E l'endomorphisme identité de E ;
- Δ le sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$ formé des couples (t, τ) vérifiant $1 \leqslant t \leqslant \tau$.

Première partie

Dans cette partie on désigne par k une fonction complexe continue bornée sur Δ et on pose $\|k\| = \sup\limits_{(t,\tau) \in \Delta} |k(t, \tau)|$.

1. Vérifier que, pour toute fonction u de E, la fonction $t \mapsto \displaystyle\int_t^\infty k(t, \tau) u(\tau) \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^2}$ est bien définie sur J et appartient à E.

2. Vérifier que, si l'on note $A(u)$ la fonction ainsi définie, on définit un élément A de $\mathcal{L}(E)$; comparer $\|A\|$ et $\|k\|$.

3. Déterminer une constante $K \geqslant 0$ telle que l'on ait, pour tout $n \geqslant 0$ et tout $t \in J$
$$|\Big(A^n(u)\Big)(t)| \leqslant \frac{K^n \|u\|}{n!\, t^n} \ .$$

4. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} A^n$ est convergente dans $\mathcal{L}(E)$, et calculer le produit $(I_E - A) \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} A^n$.

On fixe une fonction u_0 de E et on considère l'équation intégrale

$$u(t) = u_0(t) + \int_t^{\infty} k(t,\tau)u(\tau)\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^2} \tag{1}$$

où u est une fonction inconnue dans E.

5. Quel est le nombre de solutions de (1) ?

Deuxième partie

On s'intéresse maintenant à l'équation (1) où l'on prend

$$u_0(t) = e^{\varepsilon it} \quad , \quad k(t,\tau) = \lambda \sin(t-\tau)$$

($\varepsilon \in \{+,-\}, \lambda \in \mathbf{C}$). On note u_ε sa solution.

6. Montrer que u_ε est de classe C^∞.

7. Vérifier que u_ε est solution sur J de l'équation différentielle

$$u''(t) + \left(1 + \frac{\lambda}{t^2}\right)u(t) = 0\ . \tag{2}$$

8. Le couple (u_+, u_-) est-il une base de l'espace vectoriel des solutions de (2) dans E ?

Troisième partie

On se propose d'étudier le comportement asymptotique de la fonction $u = u_+$ lorsque $t \to +\infty$. On dit qu'une fonction f de E admet un *développement asymptotique à l'ordre* $k \geqslant 0$ s'il existe des constantes $\alpha_0, \dots, \alpha_k$ telles que l'on ait

$$f(t) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \frac{1}{t^j} + O\left(\frac{1}{t^{k+1}}\right)$$

(ce qui signifie que la fonction $t^{k+1}\left(f(t) - \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \frac{1}{t^j}\right)$ est bornée).

On admettra qu'une telle famille $(\alpha_0, \dots, \alpha_k)$, si elle existe, est unique. On dit qu'une fonction f de E admet un *développement asymptotique à l'ordre* ∞ si elle admet un développement asymptotique à tout ordre k.

9. On se propose ici de construire un développement asymptotique à l'ordre ∞ pour chacune des fonctions

$$\varphi_n(t) = e^{-it}\int_t^{\infty} \sin(t-\tau)\frac{e^{i\tau}}{\tau^{n+2}}\mathrm{d}\tau \quad (n \text{ entier } \geqslant 0 \quad , \quad t \in [1, +\infty[)\ ,$$

développement asymptotique que l'on écrira

$$\varphi_n(t) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{n,j} \frac{1}{t^{n+j}} + O\left(\frac{1}{t^{n+k+1}}\right) . \tag{3}$$

a) Vérifier que, pour tout entier $m \geqslant 1$, on a $\displaystyle\int_t^{\infty} \frac{e^{i\tau}}{\tau^m} \mathrm{d}\tau = O\left(\frac{1}{t^m}\right)$.

b) Établir, pour tous entiers $n \geqslant 0$, $k \geqslant 1$, la formule

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{(n+1)!} \left[\sum_{j=1}^{k} \frac{(n+j-1)!}{(2i)^j \; t^{n+j}} - \frac{(n+k)! \; e^{-2it}}{(2i)^k} \int_t^{\infty} \frac{e^{2i\tau}}{\tau^{n+k+1}} \mathrm{d}\tau \right] .$$

c) Conclure.

10. On se propose maintenant de construire un développement asymptotique à l'ordre ∞ pour la fonction $e^{-it} u(t)$; on a donc, par définition

$$u(t) = e^{it} + \lambda \int_t^{\infty} \sin(t-\tau) u(\tau) \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^2} . \tag{4}$$

On écrira ce développement asymptotique sous la forme

$$e^{-it} u(t) = \sum_{j=0}^{k} \gamma_j \frac{1}{t^j} + O\left(\frac{1}{t^{k+1}}\right) .$$

a) Vérifier que l'on a

$$e^{-it} u(t) = 1 + O\left(\frac{1}{t}\right) .$$

b) Supposant construits $\gamma_0, \ldots, \gamma_n$, écrire γ_{n+1} en fonction de $\gamma_0, \ldots, \gamma_n$ et des divers $\alpha_{p,q}$.

c) Vérifier que l'on a

$$\gamma_{n+1} = \frac{1}{2i} \left(n + \frac{\lambda}{n+1} \right) \gamma_n .$$

d) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n x^n$?

* *
*