ÉCOLE POLYTECHNIQUE **FILIÈRE MP**

CONCOURS D'ADMISSION 2009

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Exponentielles d'endomorphisme, intégrales et séries

Première partie

On désigne par $C^\infty(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles, de classe C^∞, d'une variable réelle. On définit comme suit des endomorphismes de cet espace :

- pour toute $f \in C^\infty(\mathbf{R})$, $(Xf)(x) = xf(x)$, $(Df)(x) = f'(x)$, $(Af)(x) = xf'(x)$,
- pour tout nombre réel t et pour toute $f \in C^\infty(\mathbf{R})$, $(\Phi_t f)(x) = f(e^t x)$.

1. Vérifier que la valeur en $t = 0$ de la dérivée de la fonction $t \mapsto (\Phi_t f)(x)$ est égale à $(Af)(x)$.

On va maintenant étudier les puissances de A et chercher le sens à donner à la formule $\exp(tA) = \Phi_t$.

2. Vérifier que, si f est un polynôme, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{t^n}{n!}(A^n f)(x)$ est convergente et de somme $(\Phi_t f)(x)$.

3. Montrer que, pour tout entier $n > 0$, on a $D^n X = XD^n + nD^{n-1}$.

4. Montrer que, pour tout entier $n > 0$, il existe des nombres réels positifs $\mu_{n,k}$, $k = 1, \ldots, n$, tels que $A^n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mu_{n,k} X^k D^k$, et exprimer $\mu_{n,k}$ en fonction des $\mu_{n-1,p}$, $p = 1, \ldots, n-1$. Préciser les valeurs de $\mu_{n,1}$ et $\mu_{n,n}$.

5. On désigne par f un polynôme d'une variable réelle. Démontrer la relation

$$\forall t,\, x \in \mathbf{R} \quad f(e^t x) = f(x) + \sum_{k \geqslant 1} \left(\sum_{n \geqslant k} \frac{t^n}{n!} \mu_{n,k} \right) x^k f^{(k)}(x) \ .$$

6. Étant donné une suite de nombres réels a_k, $k \in \mathbf{N}$, comparer les rayons de convergence des séries entières $\sum_{k \geqslant 0} a_k x^k$ et $\sum_{k \geqslant 0} k a_k x^k$.

7. On se donne maintenant une fonction développable en série entière $f(x) = \sum_{k \geqslant 0} a_k x^k$ de rayon de convergence $R > 0$. On admettra la propriété suivante :

(P) si $|x| < R$, la série entière en h : $\sum_{k \geqslant 0} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x)$ a un rayon de convergence au moins égal à $R - |x|$, et, si $|h| < R - |x|$, on a $\sum_{k \geqslant 0} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x) = f(x+h)$.

7.a) Vérifier que, si $|x| < R$, il existe un réel $\gamma_x > 0$ tel que

$$|t| < \gamma_x \ \Rightarrow \ |(e^t - 1)x| < R - |x| \ .$$

7.b) Démontrer l'existence de nombres réels $\lambda_{n,k}$, $n, k \in \mathbf{N}^*$, indépendants de f et tels que l'on ait

$$\forall x \in]-R, R[\quad , \quad \forall t \in]-\gamma_x, \gamma_x[\quad , \quad f(e^t x) = f(x) + \sum_{k \geqslant 1} \left(\sum_{n \geqslant 1} \frac{t^n}{n!} \lambda_{n,k} \right) x^k f^{(k)}(x) \ .$$

7.c) Vérifier que

$$\lambda_{n,k} \ = \begin{cases} \mu_{n,k} & \text{si} \quad k \leqslant n \\ 0 & \text{si} \quad k > n \ . \end{cases}$$

[On pourra utiliser le résultat de la question **5.**]

7.d) Montrer que, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on a $\lambda_{n,k} \leqslant 2^n \frac{n!}{(k-1)!}$.

7.e) On pose $Z_{n,k} = \frac{t^n}{n!} \lambda_{n,k} x^k f^{(k)}(x)$. Indiquer deux réels $\alpha > 0$ et $\eta > 0$ tels que

$$|x| < \alpha \ , \ |t| < \eta \ \Rightarrow \ \sum_{k \geqslant 1} \left(\sum_{n \geqslant 1} |Z_{n,k}| \right) < +\infty \ .$$

7.f) Montrer que, si $|x| < \alpha$ et $|t| < \eta$, la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{t^n}{n!} (A^n f)(x)$ est convergente et de somme $(\Phi_t f)(x)$.

Deuxième partie

Dans cette partie, on désigne par $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel des fonctions f réelles, d'une variable réelle, continues et telles que, pour tout entier $k \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto x^k f(x)$ soit bornée.

8. Soit f une fonction de $\mathcal{F}$. Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto x^k f(x)$ est intégrable sur $\mathbf{R}$.

On posera $m_k(f) = \int_{\mathbf{R}} x^k f(x) dx$.

9. Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{F}$.

9.a) Montrer que, pour tout réel x, la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbf{R}$.

On notera $f * g$ la fonction $x \mapsto \int_{\mathbf{R}} f(x-y)g(y)dy$.

9.b) Montrer que $f * g$ appartient à $\mathcal{F}$ et écrire une formule de la forme

$$m_k(f * g) = \sum_{p=0}^{k} \gamma_{k,p} m_p(f) m_{k-p}(g)\,,$$

où les $\gamma_{k,p}$ sont des coefficients à déterminer.

On admettra la commutativité et l'associativité de l'opération $(f, g) \mapsto f * g$.

Dans la suite du problème, on désigne par $\mathcal{F}_0$ l'ensemble des fonctions f de $\mathcal{F}$ qui sont positives et telles que $m_0(f) = 1$ et $m_1(f) = 0$.

10. Étant donné des fonctions $f_1, \ldots, f_n$ de $\mathcal{F}_0$, calculer $m_0(f_1 * \ldots * f_n)$ et $m_1(f_1 * \ldots * f_n)$ puis exprimer $m_2(f_1 * \ldots * f_n)$ en fonction des $m_2(f_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

Pour tout réel $a > 0$, on désigne par T_a l'endomorphisme de $\mathcal{F}$ défini par $(T_a f)(x) = af(ax)$.

11. Calculer $m_k(T_a f)$.

Dans la suite du problème on désigne par $f_i, i = 1, 2, \ldots$, des fonctions de $\mathcal{F}_0$, et, pour tout n, on pose $F_n = f_1 * \ldots * f_n$. On suppose que tous les $m_2(f_i)$ sont majorés par une même constante C.

12.a) Montrer que, pour tout réel $\alpha > 0$, les deux intégrales $\int_{\alpha}^{+\infty} (T_n F_n)(x) dx$ et $\int_{-\infty}^{-\alpha} (T_n F_n)(x) dx$ tendent vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

12.b) Étant donné une fonction h continue bornée sur $\mathbf{R}$, étudier le comportement de $\int_{\mathbf{R}} h(x)(T_n F_n)(x)dx$ lorsque $n \to +\infty$.

[On pourra considérer d'abord le cas où $h(0) = 0$.]

13.a) Établir une inégalité entre $m_4(f)$ et $m_2(f)^2$ lorsque $f \in \mathcal{F}_0$.

13.b) Démontrer la formule, pour $n \geqslant 2$,

$$m_4(F_n) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} m_4(f_i) + 6 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} m_2(f_i) m_2(f_j) \ .$$

13.c) Trouver une condition portant sur les $m_4(f_i)$ sous laquelle on ait, pour tout $\alpha > 0$,

$$\sum_{n \geqslant 1} \int_{\alpha}^{+\infty} (T_n F_n)(x)dx < +\infty \ .$$

* *
*