ECOLE POLYTECHNIQUE

OPTION P'

CONCOURS D'ADMISSION 1991

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

On se propose de démontrer l'existence et l'unicité de la solution du « problème de Dirichlet discret pour le rectangle » ; c'est l'objet de la partie III ; les préparations nécessaires sont faites aux parties I et II ; la partie IV est consacrée à quelques calculs explicites.

Dans tout le problème, pour tout entier $n > 0$, on note $M(n, \mathbf{C})$ l'ensemble des matrices complexes à n lignes et n colonnes, I_n la matrice unité, J_n la matrice ayant pour coefficients

$$(J_n)_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } |i-j| = 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On identifie une matrice à l'endomorphisme qu'elle représente dans la base canonique de $\mathbf{C}^n$. On munit $\mathbf{C}^n$ de sa norme usuelle

$$\|Z\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

et $M(n, \mathbf{C})$ de la norme définie par :

$$\|M\| = \max_{\|Z\|=1} \|M(Z)\|$$

PARTIE I

On fixe deux nombres réels α et β, β étant non nul ; on pose :

$$A_n = \alpha I_n + \beta J_n$$
$$P_n(X) = \det(XI_n - A_n) \qquad \forall n \geq 2$$
$$P_0(X) = 1$$
$$P_1(X) = X - \alpha$$

1. Démontrer que, pour $n > 0$, tous les zéros de P_n sont réels.

2. Montrer qu'il existe des formes linéaires λ_n, $n \geq 0$, sur $\mathbf{C}[X]$, déterminées de façon unique par la condition :

$$Q = \sum_{n \geq 0} \lambda_n(Q)\, P_n \qquad \forall Q \in \mathbf{C}[X]$$

3. Vérifier que pour tout entier $n \geq 2$:

$$P_n(X) = (X - \alpha)\, P_{n-1}(X) - \beta^2 P_{n-2}(X)$$

Tournez la page S.V.P.

4. Calculer les composantes de XP_n sur la base des P_k $(k \geq 0)$.

5. Pour tout couple d'entiers (m, n) vérifiant $m \leq n$, démontrer les propriétés suivantes :

a - $\lambda_0(X^m P_n) = \begin{cases} 0 \text{ si } m < n \\ \beta^{2n} \text{ si } m = n \end{cases}$

[On pourra raisonner par récurrence sur m .]

b - $\lambda_0(P_m P_n) = 0$ si $m \neq n$

c - Pour tout élément Q de $\mathbf{C}[X]$, $\lambda_0(Q\overline{Q})$ est positif ou nul, et nul si et seulement si Q est nul [$\overline{Q}$ désigne le polynôme dont les coefficients sont les complexes conjugués de ceux de Q].

6. Montrer que, pour $n > 0$, tous les zéros de P_n sont simples.

PARTIE II

On suppose ici $\alpha = 4$; $\beta = -1$; n désigne toujours un entier > 0.

1. Vérifier que $\| J_n \| < 2$.

2. Montrer que toutes les valeurs propres de A_n sont strictement supérieures à 2 [on rappelle que A_n est symétrique et réelle].

3. Construire une matrice T_n, inversible, telle que $A_n = T_n + T_n^{-1}$ et que $T_n^k - I_n$ soit inversible pour tout entier k non nul.

4. On se donne un entier $q \geq 2$ et un vecteur W de $\mathbf{C}^n$. Construire une suite $V_0, \ldots, V_q$ d'éléments de $\mathbf{C}^n$ vérifiant :

$$V_k = A_n V_{k-1} - V_{k-2} \qquad \text{pour } k = 2, \ldots, q$$
$$V_0 = 0 \quad , \quad V_q = W$$

Démontrer l'unicité d'une telle suite.

PARTIE III

On fixe deux entiers p et q au moins égaux à 2 ; on note R le « rectangle discret » :

$$R = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = 0, 1, \ldots, p+1 \ ; y = 0, 1, \ldots, q+1 \}$$

On appelle R^0 son « intérieur » :

$$R^0 = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = 1, \ldots, p \ ; y = 1, \ldots, q \}$$

On désigne par ∂R sa « frontière », réunion des 5 ensembles suivants :

$$F_1 = \{ (x, 0) \mid x = 1, \ldots, p \}$$
$$F_2 = \{ (x, q+1) \mid x = 1, \ldots, p \}$$
$$F_3 = \{ (0, y) \mid y = 1, \ldots, q \}$$
$$F_4 = \{ (p+1, y) \mid y = 1, \ldots, q \}$$
$$S = \{ (0, 0), (0, q+1), (p+1, 0), (p+1 ; q+1) \} .$$

A SUIVRE

On dit qu'une fonction complexe h définie sur R est « harmonique » si elle vérifie :

$$4\,h(x,y) = h(x+1,y) + h(x-1,y) + h(x,y+1) + h(x,y-1) \qquad \forall (x,y) \in R^0 .$$

Si ϕ est une fonction complexe donnée sur ∂R, on appelle « problème de Dirichlet pour ϕ » la recherche d'une fonction harmonique h sur R, coïncidant avec ϕ sur ∂R.

1. On suppose d'abord ϕ nulle sur $\partial R \backslash F_2$ (on désigne ainsi le complémentaire de F_2 dans ∂R) ; on note W le vecteur de C^p de coordonnées $\phi(i, q+1)$, $i = 1, ..., p$. A toute fonction h sur R on associe les vecteurs V_k, $k = 0, ..., q+1$, de coordonnées $h(i,k)$, $i = 1, ..., p$. Ramener le problème de Dirichlet pour ϕ à la résolution du système :

$$V_k = A_n V_{k-1} - V_{k-2} \qquad \text{pour } k = 2, ..., q+1$$

$$V_0 = 0 \quad , \quad V_{q+1} = W \; .$$

Démontrer l'existence et l'unicité de sa solution.

2. Traiter le cas où ϕ est nulle sur $\partial R \backslash S$, puis le cas général.

PARTIE IV

On admettra l'existence de polynômes Q_n (de degré $n \geqslant 0$) tels que :

$$Q_n(\cos x) = \frac{\sin(n+1)x}{\sin x}$$

1. Vérifier que l'on a, pour tout $n \geqslant 2$:

$$Q_n(X) = 2X\,Q_{n-1}(X) - Q_{n-2}(X)$$

2. Trouver une relation simple entre les polynômes Q_n et les polynômes P_n définis à la partie I à l'aide d'un couple (α, β) convenable.

3. Déterminer les valeurs propres des matrices A_n de la partie I.

4. On note λ une valeur propre de A_n. Trouver des scalaires $\nu_0, ..., \nu_{n-1}$ tels que le vecteur de coordonnées $\nu_i P_i(\lambda)$, où $i = 0, ..., n-1$, soit vecteur propre pour A_n associé à la valeur propre λ.

♦ ♦
♦

FIN