DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

◆

On se propose, étant donnée une famille $V = (v_1, ..., v_n)$ de n vecteurs de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, d'étudier le problème $(\mathcal{P}_V)$ suivant :

$(\mathcal{P}_V)$ Existe-t-il une base orthonormée $F = (f_1, ..., f_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et un endomorphisme idempotent P (c'est-à-dire tel que $P^2 = P$) de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $P(f_i) = v_i$ pour $i = 1, ..., n$?

Un tel couple $(F ; P)$ sera appelé *solution* du problème $(\mathcal{P}_V)$.

On écartera le cas trivial où $v_1, ..., v_n$ sont tous nuls. On notera $(\mid)$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$, $\| \ \|$ la norme correspondante et S^{n-1} la sphère de rayon 1 dans $\mathbb{R}^n$. On désignera par ${}^tA$ l'adjoint d'un endomorphisme A ; par X_V le sous-espace vectoriel engendré par $v_1, ..., v_n$, et par d_V sa dimension.

I

Cette partie I est consacrée à des cas particuliers.

1) Résoudre le problème $(\mathcal{P}_V)$ dans le cas où $d_V = n$.

2) On suppose $n = 2$ et $d_V = 1$. Montrer que le problème $(\mathcal{P}_V)$ admet des solutions si et seulement si l'on a

$$\| v_1 \|^2 + \| v_2 \|^2 \geqslant 1 \quad .$$

Préciser le nombre de ces solutions.

3) On suppose $n > 2$ et $d_V = 1$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le problème $(\mathcal{P}_V)$ admette des solutions ; décrire l'ensemble de ces solutions à l'aide de la sphère S^{n-2} et du groupe orthogonal $\mathrm{O}(\mathbb{R}^{n-1})$.

II

Cette partie II est consacrée à l'étude de certains endomorphismes de $\mathbb{R}^n$.

4) On désigne par A un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

a) Etablir les égalités

$$\mathrm{Ker}\,({}^tA\,A) = \mathrm{Ker}\,A$$

$$\mathrm{Im}\,(A\,{}^tA) = \mathrm{Im}\,A \quad .$$

b) Comparer les valeurs propres de ${}^tA\,A$ et $A\,{}^tA$ ainsi que leurs multiplicités.

5) On désigne par A et B deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ tels que $A\,{}^tA = B\,{}^tB$.

a) Montrer qu'il existe des automorphismes orthogonaux U vérifiant $A = BU$.

[On pourra utiliser, en le justifiant, une base orthonormée $(e_1, ..., e_n)$ diagonalisant $A\,{}^tA$, et introduire les vecteurs a_i et b_i définis par $a_i = \sum_j a_{ij}\, e_j$, $b_i = \sum_j b_{ij}\, e_j$ où les a_{ij} et b_{ij} sont les coefficients des matrices de A et B dans cette base].

b) Décrire l'ensemble de ces automorphismes U. Dans quel cas a-t-on unicité ?

III

On fixe une famille $V = (v_1, ..., v_n)$; pour toute base orthonormée $E = (e_1, ..., e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ on note $A_{V,E}$ l'endomorphisme qui, pour tout i, transforme e_i en v_i.

6) Vérifier que l'endomorphisme $A_{V,E}\,{}^tA_{V,E}$ est indépendant de E. On le notera T_V.

7) Montrer que le problème $(\mathcal{P}_V)$ admet des solutions si et seulement s'il existe un endomorphisme idempotent P vérifiant $T_V = P\,{}^tP$.

8) En supposant $d_V = 1$, retrouver le premier résultat du 3).

9) On suppose maintenant d_V quelconque :

a) Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur les valeurs propres de T_V, pour que le problème $(\mathcal{P}_V)$ admette des solutions.

b) Décrire l'ensemble de ces solutions.