École Polytechnique

On considère l'équation différentielle

$$(E_1) \qquad y' = x^2 + y^2$$

où y est une fonction réelle inconnue de la variable réelle x.

I

1. Soit φ une solution maximale de (E_1) et I son intervalle ouvert de définition.

a) Montrer que φ est strictement croissante.

b) On suppose qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $\varphi(x_0) > 0$. Montrer que, pour $x \geq x_0$ et $x \in I$, on a : $\dfrac{\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2} \geq 1$.
En déduire que l'intervalle I est majoré.

c) Que peut-on dire de I s'il existe $x_1 \in I$ tel que $\varphi(x_1) < 0$?

d) Montrer que I est borné.

e) Déterminer l'image de I par φ.

f) Combien existe-t-il de solutions maximales impaires ?

2. On fixe un réel α ; pour tout réel β, on note $I(\beta)$ l'intervalle de définition de la solution maximale vérifiant $\varphi(\alpha) = \beta$. Comparer les bornes des intervalles $I(\beta_1)$ et $I(\beta_2)$ lorsque $\beta_1 \leq \beta_2$.

3. On désigne par H l'ensemble des points (u, v) de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels il existe une solution φ de (E_1) telle que $\varphi(u) = v$ et $\varphi''(u) = 0$. Dessiner succintement H en précisant son asymptote ainsi que les points où la tangente est parallèle à l'un des axes de coordonnées.

4. On fixe un nombre réel t et on note φ_t la solution maximale s'annulant en t. Déterminer la courbure puis le centre de courbure de φ_t au point $(t, 0)$.

II

On désigne par $\mathcal{S}$ l'espace vectoriel des fonctions réelles f, définies sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ et satisfaisant l'équation différentielle

$$(E_2) \qquad y'' + x^2 y = 0.$$

5. Préciser la dimension de $\mathcal{S}$.

6. **a)** Déterminer les séries entières dont la somme est solution de (E_2). Calculer leur rayon de convergence.

b) En déduire l'expression comme somme d'une série entière des fonctions f_1 et f_2 de $\mathcal{S}$ définies respectivement par $f_1(0) = 1$ et $f_1'(0) = 0$, $f_2(0) = 0$ et $f_2'(0) = 1$.

c) Soit f une fonction de $\mathcal{S}$. Exprimer f en fonction de f_1, f_2 et des nombres $a = f(0)$, $b = f'(0)$. Étudier, suivant les valeurs de a et b, la position du graphe de f par rapport à sa tangente au point $(0, a)$.

7. Montrer que f_1 est strictement positive sur l'intervalle $[-2, 2]$.
[On pourra commencer par étudier la somme des quatre premiers termes de la série.]

III

On désigne par φ une fonction de classe C^1 définie sur un intervalle I, par Φ une primitive de φ, et on pose $f(x) = e^{-\Phi(x)}$ pour tout $x \in I$.

8. Quelle condition nécessaire et suffisante doit satisfaire φ pour que f soit solution de (E_2) ?

9. On suppose ici que φ est une solution maximale de (E_1), et on appelle I son intervalle ouvert de définition.

a) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers l'une ou l'autre des bornes de I en restant dans I.

b) On suppose φ impaire. Que peut-on dire de I ? Calculer la dérivée $\varphi^{(n)}(0)$ lorsque n n'est pas de la forme $4k+3$.

10. Soit f une fonction de $\mathcal{S}$ non identiquement nulle.

a) Soit x_0 un zéro de f. Montrer qu'il existe un voisinage de x_0 sur lequel f ne s'annule qu'en x_0.

b) Montrer que l'ensemble $f^{-1}(\{0\})$ des zéros de f n'est borné ni supérieurement ni inférieurement.

c) Comment varie f entre deux zéros consécutifs ?

♦ ♦ ♦