option P'

**Durée : 4 heures**

On désigne par $E$ l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n (n = 1, 2, \cdots)$ muni de son produit scalaire usuel noté $(\,|\,)$ ; par $\operatorname{End} E$ l'espace vectoriel des endomorphismes de $E$ ; par $\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Im} A$ et $A^*$ respectivement le noyau, le sous-espace image et l'adjoint d'un endomorphisme $A$ ; par $F^\perp$ le sous-espace orthogonal d'un sous-espace vectoriel $F$ de $E$. On note $AB$ la composée de deux applications $A$ et $B$, et $Ax$ l'image d'un élément $x$ par $A$.

## Première partie

On dit qu'un endomorphisme $A$ de $E$ est *positif* si l'on a $(Ax|x) \geq 0$ pour tout $x$ de $E$.

**1.** Soit $A$ un endomorphisme symétrique de $E$.

**a)** Donner un critère, portant sur les valeurs propres de $A$, pour que $A$ soit positif.

**b)** Montrer que si $A$ et $B$ sont deux endomorphismes symétriques positifs tels que $B^2 = A$, $A$ et $B$ ont les mêmes sous-espaces propres.

**c)** En déduire que si $A$ est un endomorphisme symétrique positif, il existe un unique endomorphisme symétrique positif $B$ tel que $B^2 = A$. On le notera $A^{1/2}$.

**2.** Donner un exemple simple d'endomorphisme positif mais non symétrique.

**3.** Soit $A$ un endomorphisme de $E$.

**a)** Vérifier que $A^*A$ est symétrique et positif. Comparer son noyau et celui de $A$, son image et celle de $A^*$. On posera $|A| = (A^*A)^{1/2}$.

**b)** Déterminer $|kA|$, $k$ étant un réel.

**4.** *Exemple* : déterminer $|A|$ lorsque $n = 3$ et lorsque $A$ est représenté dans la base naturelle de $E$ par une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $\alpha$ et $\beta$ sont non nuls.

## Deuxième partie

On dit qu'un endomorphisme $U$ de $E$ est *partiellement isométrique* si l'on a $\|Ux\| = \|x\|$ pour tout $x \in (\operatorname{Ker} U)^\perp$.

**5.** Soit $U$ un endomorphisme partiellement isométrique de $E$.

**a)** Montrer que l'on a $(Ux|Uy) = (x|y)$ pour tous $x$ et $y \in (\operatorname{Ker} U)^\perp$.

**b)** Comparer $U^*U$ et le projecteur orthogonal sur le sous-espace $(\operatorname{Ker} U)^\perp$.

**c)** Montrer que $U^*$ est partiellement isométrique et déterminer $UU^*$.

**6.** Soit $U$ un endomorphisme de $E$ ; montrer que si $U^*U$ est un projecteur, $U$ est partiellement isométrique.

**7.** Le produit de deux endomorphismes partiellement isométriques est-il toujours partiellement isométrique ?

**8.** Soit $A$ un endomorphisme de $E$.

**a)** Construire un endomorphisme partiellement isométrique $U$ vérifiant $|A| = UA$ et $(\text{Ker } U)^{\perp} = \text{Im } A$. Déterminer $U^*UA$.

**b)** Démontrer l'unicité de $U$.

**9.** Déterminer $U$ dans le cas de l'exemple de la question **4.**.

## Troisième partie

On note $Tr\,A$ la trace de $A$.

**10.** Soit $T$ un endomorphisme tel que l'on ait $Tr(VT) \leq Tr\,T$ pour tout automorphisme orthogonal $V$.

**a)** Montrer que $T$ est symétrique [on pourra examiner d'abord le cas où $n = 2$].

**b)** Montrer que $T$ est positif.

**11.** Soit $A$ un endomorphisme de $E$ ; on note $G$ l'ensemble des endomorphismes partiellement isométriques $V$ vérifiant $V^*VA = A$.

Montrer que la fonction réelle $f$ sur $G$ définie par $f(V) = Tr(VA)$ est bornée, qu'elle atteint son maximum en au moins un élément $V_0$, et qu'on a alors $V_0A = |A|$.

**12.** On fixe un endomorphisme symétrique positif $A$ et deux endomorphismes partiellement isométriques $U$ et $V$.

**a)** Vérifier que l'on a $Tr(V^*AV) \leq Tr\,A$.

**b)** Démontrer que l'on a $Tr(UVA) \leq Tr\,A$.

On pourra démontrer que

$$Tr(UVA) = \sum_i (A^{1/2}e_i | A^{1/2}V^*U^*e_i)$$

où $(e_i)$ est une base orthonormée de $E$, puis que

$$Tr(UVA) \leq (\sum_i \|A^{1/2}e_i\|^2)^{1/2} (\sum_i \|A^{1/2}V^*U^*e_i\|^2)^{1/2}$$

**13.** Construire sur $\text{End}\,E$ une norme $N$ d'espace vectoriel telle que $N(A) = Tr\,A$ si $A$ est symétrique et positif.