CONCOURS D'ADMISSION 1997 OPTION PC

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 3 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

★★★

On désigne par A l'algèbre des fonctions définies sur l'ensemble $\mathbb{R}^*$ des nombres réels non nuls, à valeurs réelles, et par E le sous-ensemble des fonctions $f \in A$ qui s'écrivent, pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n ,$$

où $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille de nombres réels, *nuls pour* $|n|$ *assez grand*. Pour chaque $f \in E$, la somme indiquée est une somme finie, et les coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont déterminés de manière unique. Le coefficient a_0 s'appelle le *terme constant* de f, et sera noté aussi $TC(f)$.

Première partie

1.a) Montrer que E est une sous-algèbre de A.

b) On désigne par α l'application linéaire qui à un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{R}$ en l'indéterminée X associe la restriction à $\mathbb{R}^*$ de la fonction polynomiale $x \mapsto P(x)$. Montrer que α est injective.

On identifiera donc l'algèbre $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ en l'indéterminée X avec la sous-algèbre $\alpha(\mathbb{R}[X])$ de E, et l'on écrira un élément f de E sous la forme :

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n X^n .$$

2. On pose pour tout f dans E, $M_f\, g = fg$. Déterminer le noyau de l'endomorphisme M_f de l'espace vectoriel E.

3. Pour tout f dans E, on définit $\tilde{f} \in E$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^* , \quad \tilde{f}(x) = f(x^{-1}) .$$

a) Montrer que $(\tilde{\tilde{f}}) = f$ et que $TC(\tilde{f}) = TC(f)$.

b) Calculer $TC(f\tilde{f})$ en fonction des coefficients de f.

c) Comparer $(\widetilde{fg})$ et $\tilde{f}\tilde{g}$, pour $f, g \in E$.

4. Déterminer les éléments inversibles dans l'algèbre E.

Deuxième partie

On considère dans toute la suite un *entier* k, *positif ou nul*, et l'on pose, pour f et g dans E,

$$(f|g)_k = TC\left(f_{[k]}\widetilde{g_{[k]}}\right) ,$$

où $f_{[k]} = f \,.\, (X-1)^k$.

5. Montrer que $(\ \ |\ \ )_k$ est un produit scalaire sur E.

6. Montrer que, pour tout f dans E,

$$(M_f\, g|h)_k = (g|M_{\tilde{f}}\, h)_k \,, \quad \text{pour tous } g, h \in E \,.$$

7. On dira que l'endomorphisme M_f de E est *orthogonal* si

$$(M_f\, g|M_f\, h)_k = (g|h)_k \,, \quad \text{pour tous } g, h \in E \,.$$

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) M_f est orthogonal,

(ii) $f\tilde{f} = 1$,

(iii) $\exists n \in \mathbb{Z}\,, \quad \exists \varepsilon \in \{-1, +1\}\,, \quad f = \varepsilon X^n$.

8. On dira que l'endomorphisme M_f de E est *auto-adjoint* si

$$(M_f\, g|h)_k = (g|M_f\, h)_k \,, \quad \text{pour tous } g, h \in E \,.$$

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) M_f est auto-adjoint,

(ii) $f = \tilde{f}$,

(iii) $\exists P \in \mathbb{R}[X]\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*\,, \quad f(x) = P(x + x^{-1})$.

Troisième partie

9.a) Calculer $(X^i|X^j)_k$ en fonction des entiers $i, j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$.

b) Expliciter le calcul de $(X^i|X^j)_0$, $(X^i|X^j)_1$ et $(X^i|X^j)_2$.

c) Montrer que, pour tout entier ℓ tel que $0 \leq \ell \leq k$,

$$\binom{2k}{k+\ell} = \sum_{p=0}^{k-\ell} \binom{k}{p} \binom{k}{p+\ell} .$$

10. Dans cette question, on considère l'espace préhilbertien réel F_k égal à $\mathbb{R}[X]$ muni de la restriction du produit scalaire $(\ |\ )_k$.

a) Montrer que la famille $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthonormale dans F_k si et seulement si $k = 0$.

On se propose de déterminer dans F_k, pour $k = 1$ et $k = 2$, une famille orthonormale $(P_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $P_n^{(k)}$ soit un polynôme de degré n.

b) On considère le polynôme $B_n = X^{n+2} - \dfrac{n+2}{n+1} X^{n+1} + \dfrac{1}{n+1}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Montrer qu'il existe un polynôme A_n de degré n tel que $B_n = A_n \, . \, (X-1)^2$.

Calculer $(A_n|X^m)_1$, puis $(A_n|A_m)_1$ pour $n, m \in \mathbb{N}$. En déduire une famille orthonormale $(P_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$ dans F_1.

c) On suppose $k \geq 2$. Montrer que si $(B_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille de polynômes telle que

(i) $B_n^{(k)}$ est de degré $n + 2k$ et de coefficient dominant 1,

(ii) dans $B_n^{(k)}$, le coefficient de X^i est nul pour $k \leq i \leq k + n - 1$,

(iii) $B_n^{(k)}$ est de la forme $A_n^{(k)} \, . \, (X-1)^{2k}$, où $A_n^{(k)}$ est un polynôme,

alors les polynômes $A_n^{(k)}$, $n \in \mathbb{N}$, forment une famille orthogonale dans F_k.

Déterminer une famille de polynômes $(B_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}}$ et en déduire une famille orthonormale $(P_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}}$ dans F_2.