COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

INTRODUCTION. On désigne par $\mathbf{K}$ le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels ou le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes et par N un entier supérieur ou égal à 1. On s'intéresse aux systèmes d'équations différentielles dans $\mathbf{K}^N$ et, en particulier, à l'étude de propriétés qualitatives de leurs solutions et à leur approximation. On se limitera aux systèmes s'écrivant

$$\begin{aligned} u'(t) &= f(u(t)),\ 0 \leq t < T & (1)\\ u(0) &= u_0 & (2)\end{aligned}$$

où $u : [0,T[\to \mathbf{K}^N$ est la fonction inconnue, f une fonction donnée de $\mathbf{K}^N$ dans $\mathbf{K}^N$, u_0 la donnée initiale dans $\mathbf{K}^N$ et où T désigne ou bien un nombre strictement positif, ou bien $+\infty$.

Dans tous les cas, la fonction f sera supposée au minimum *localement lipschitzienne sur* $\mathbf{K}^N$, c'est-à-dire qu'il existe une fonction croissante k de $[0,+\infty[$ dans $[0,+\infty[$ telle que, pour tout $r \geq 0$ et tout x, y de $\mathbf{K}^N$ avec $||x|| \leq r$ et $||y|| \leq r$

$$||f(x) - f(y)|| \leq k(r)\,||x - y|| \qquad (3)$$

où $||.||$ désigne une norme sur $\mathbf{K}^N$ choisie une fois pour toutes dans ce problème.

Par définition, une *solution de* (1) est une fonction continûment dérivable de $[0,T[$ dans $\mathbf{K}^N$ telle que l'équation (1) soit satisfaite pour tout t de $[0,T[$.

Le problème se compose de trois parties **qui peuvent être abordées indépendamment.**

1ère PARTIE. On s'intéresse ici à plusieurs approximations des solutions du système d'équations (1)-(2) lorsque f est *linéaire*.

I-1) On commence par le cas $N = 1$: on désigne par a un élément de $\mathbf{C}$ et on s'intéresse au cas où

$$\forall x \in \mathbf{C}^N, f(x) = ax.$$

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathbf{C}$ convergeant vers a dans $\mathbf{C}$. Pour tout nombre réel positif t et tout nombre entier n supérieur à 1, on note

$$r_n = (1 + \frac{t}{n}a_n)^n,\ s_n = (1 - \frac{t}{n}a_n)^{-n}.$$

I-1.a) On suppose d'abord que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est à valeurs *réelles*. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} r_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = e^{t\,a}. \qquad (4)$$

I-1.b) Déterminer dans tous les cas les limites quand n tend vers l'infini de $r_n\,\overline{r_n}$ et de $s_n\,\overline{s_n}$.

I-1.c) Montrer qu'il existe des réels ρ_n et θ_n tels que

$$1 + \tfrac{t}{n}a_n = |1 + \tfrac{t}{n}a_n|\, e^{i\rho_n},\ 1 - \tfrac{t}{n}a_n = |1 - \tfrac{t}{n}a_n|\, e^{i\theta_n},$$
$$\lim_{n\to+\infty} n\,\rho_n \text{ et } \lim_{n\to+\infty} n\,\theta_n \text{ existent.}$$

I-1.d) Montrer que (4) reste vrai lorsque la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est à valeurs complexes.

On étudie maintenant le cas linéaire de *dimension finie quelconque*, c'est-à-dire que f est définie par

$$\forall x \in \mathbf{K}^N, f(x) = Ax \tag{5}$$

où A est un élément de l'espace $\mathcal{M}(N, \mathbf{K})$ des matrices carrées de dimension N à éléments dans $\mathbf{K}$. On note I_N la matrice unité de $\mathcal{M}(N, \mathbf{K})$. On désigne par $\| \,.\, \|$ une norme sur $\mathcal{M}(N, \mathbf{K})$ "compatible" avec la multiplication des matrices au sens que

(i) pour toutes matrices B et C, $\| BC \| \leq \| B \| \| C \|$,

(ii) $\| I_N \| = 1$.

I-2) Soit B une matrice de $\mathcal{M}(N, \mathbf{K})$.

I-2.a) Montrer que la suite de matrices

$$(I_N + \sum_{k=1}^{n} \frac{B^k}{k!})_{n \geq 1}$$

est de Cauchy. On note e^B sa limite.

I-2.b) Etablir les inégalités suivantes:

$$\| e^B \| \leq e^{\|B\|}, \quad \| e^{-B}(I_N + B) \| \leq e^{2\|B\|}.$$

I-2.c) Montrer que l'application $t \to e^{t\,B}$ est continûment dérivable sur $[0, +\infty[$ et vérifie

$$\forall t \geq 0, \ \frac{d}{dt}(e^{t\,B}) = B\, e^{t\,B}.$$

En déduire que, lorsque f est donnée par (5), le système (1) – (2) a une solution avec $T = +\infty$ que l'on précisera.

I-2.d) Montrer la dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions

$$t \to e^{-t\,B}(I_N + t\,B), \quad t \to e^{-t\,B}\, e^{t\,B},$$

puis, en déduire que $e^{-B}\, e^{B} = I_N$.

I-3) Pour l'approximation des solutions du système (1) – (2) lorsque f est donnée par (5), on introduit les suites de matrices $(R_n)_{n \geq 1}$ et $(S_n)_{n \geq 1}$ définies par

$$R_n = (I_N + \frac{T}{n} A)^n, \quad S_n = (I_N - \frac{T}{n} A)^{-n}.$$

I-3.a) Pour $s \in [0, 1]$, on pose

$$G(s) = e^{-s\,T\,A}\,(I_N + s\,\frac{T}{n}\,A)^n.$$

Calculer $G'(s)$ et majorer sa norme. En déduire l'existence d'une constante M ne dépendant que de T et de $\| A \|$ telle que

$$\| R_n - e^{T\,A} \| \leq \frac{M}{n}.$$

Conclure quant à la limite de R_n lorsque n tend vers $+\infty$.

I-3.b) Montrer que, pour $t \in [0, (2 \, \| A \|)^{-1}]$, $I_N - t\,A$ est inversible et

$$\| (I_N - t\,A)^{-1} \| \leq e^{2\,t\,\|A\|},$$
$$\tfrac{d}{dt}(I_N - t\,A)^{-1} = A\,(I_N - t\,A)^{-2}.$$

En déduire la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$ en procédant comme précédemment à l'aide de la fonction

$$H(s) = e^{-s\,T\,A}\,(I_N - s\,\frac{T}{n}\,A)^{-n}.$$

2ème PARTIE. Nous revenons au cas *non linéaire* de l'introduction avec $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ et f une fonction localement lipschitzienne de $\mathbf{R}^N$ dans $\mathbf{R}^N$.

II-1) Vérifier que u est solution de (1) sur $[0,T[$ si et seulement si u est continue de $[0,T[$ dans $\mathbf{R}^N$ et

$$\forall t \in [0,T[,\ u(t) = u(0) + \int_0^t f(u(s))\,ds.$$

II-2) Soit α une fonction continue de $[0,T[$ dans $[0,\infty[$ et α_0, β_0 des nombres réels vérifiant

$$\forall t \in [0,T[,\ \alpha(t) \leq \alpha_0 + \beta_0 \int_0^t \alpha(s)\,ds.$$

Montrer qu'alors

$$\forall t \in [0,T[,\ \alpha(t) \leq \alpha_0 e^{\beta_0 t}.$$

II-3) Soit u et $\hat{u}$ des solutions sur $[0,T[$ de (1). Montrer que, pour tout τ de $[0,T[$, il existe un nombre k_τ dépendant de τ, u et $\hat{u}$ (que l'on précisera) tel que

$$\forall t \in [0,\tau],\ \|u(t) - \hat{u}(t)\| \leq \|u(0) - \hat{u}(0)\| e^{k_\tau t}.$$

En déduire que le système (1)-(2) admet au plus une solution.

Etant donné $\epsilon > 0$, on appelle maintenant *solution ϵ-approchée* de (1), toute fonction continue sur [0,T[telle que

$$\forall t \in [0,T[,\ \|u(t) - u(0) - \int_0^t f(u(s))\,ds\| \leq \epsilon\, t.$$

II-4) Montrer que, si u et $\hat{u}$ sont des solutions ϵ-approchées de (1), elles vérifient pour tout τ de $[0,T[$

$$\forall t \in [0,\tau],\ \|u(t) - \hat{u}(t)\| \leq (\|u(0) - \hat{u}(0)\| + 2\,\epsilon\,\tau) e^{k_\tau^\epsilon t},$$

pour un nombre k_τ^ϵ dépendant de τ, u et $\hat{u}$ que l'on précisera.

II-5) Soit u_0 donné dans $\mathbf{R}^N$. A tout entier positif n, on associe la suite $(x_j)_{j=1,\dots,n}$ d'éléments de $\mathbf{R}^N$ définie par

$$\forall j = 1,\dots,n,\ x_j = x_{j-1} + \frac{T}{n} f(x_{j-1}),\ x_0 = u_0,$$

ainsi que la fonction u_n de $[0,T]$ dans $\mathbf{R}^N$ définie par

$$\forall j = 1,\dots,n,\quad \forall t \in [(j-1)\tfrac{T}{n}, j\tfrac{T}{n}],\ u_n(t) = (t\tfrac{n}{T} - (j-1))\,x_j + (j - t\tfrac{n}{T})\,x_{j-1}.$$

On note

$$R_n = \max_{0\leq j\leq n}\{\|x_j\|\},\quad M_n = \max_{0\leq j\leq n}\{\|f(x_j)\|\},\quad k_n = k(R_n),$$

où la fonction k est définie en (3). Montrer que u_n est une solution ϵ_n-approchée de (1) avec $\epsilon_n = \frac{1}{2n}\,T\,k_n\,M_n$.

II-6) Dans le schéma de la question II-5) ci-dessus, on choisit

$$T = (1 + \|u_0\|)/\mathcal{F}(1 + 2\,\|u_0\|) \tag{6}$$

où $\mathcal{F}(R)$ désigne la borne supérieure de f sur la boule fermée de centre 0 et de rayon R. Montrer que

$$R_n \leq 1 + 2\,\|u_0\|,\quad \epsilon_n \leq \frac{C}{n}$$

où C est une constante indépendante de n que l'on précisera. En déduire que u_n converge uniformément sur $[0,T[$ quand n tend vers l'infini. Vérifier que sa limite u est solution du système (1)-(2).

II-7) Pour $u_0 \in \mathbf{R}^N$, on désigne par $T(u_0)$ la borne supérieure des nombres positifs T pour lesquels il existe une solution du système (1)-(2) sur $[0,T[$.

II-7.a) Montrer que, pour tout u_0, $T(u_0)$ est strictement positif et que (1)-(2) admet une solution unique sur $[0, T(u_0)[$.

II-7.b) Prouver que

- ou bien $T(u_0) = +\infty$
- ou bien $T(u_0) < +\infty$ et $lim_{t\uparrow T(u_0)}(||u(t)||) = +\infty$.

Pour ce dernier point, on pourra raisonner par l'absurde et utiliser l'expression précise donnée par (6).

II-7.c) En déduire que, si pour un u_0, il existe une fonction L croissante de $[0, \infty[$ dans $[0, \infty[$ telle que

$$\forall t \in [0, T(u_0)[, \ ||u(t)|| \leq L(t),$$

alors $T(u_0) = +\infty$.

II-8) Outre le fait que f est localement lipschitzienne, on suppose qu'il existe des constantes C_1 et C_2 telles que, pour tout x dans $\mathbf{R}^N$

$$||f(x)|| \leq C_1 \, ||x|| + C_2.$$

Montrer qu'alors (1)-(2) admet une solution unique sur $[0, +\infty[$ pour tout u_0 de $\mathbf{R}^N$. Montrer que ceci est encore vrai si on suppose (plus généralement) que, pour tout x de $\mathbf{R}^N$,

$$< x, f(x) > \leq C_1 \, ||x||^2 + C_2$$

où $< .,. >$ désigne le produit scalaire usuel dans $\mathbf{R}^N$.

3ème PARTIE . Ensembles invariants pour (1)-(2).

On se place à nouveau dans le cadre de l'introduction avec $\mathbf{K} = \mathbf{R}$. On admet que, pour tout u_0 de $\mathbf{R}^N$, il existe une solution u de (1)-(2) avec $T = T(u_0)$ strictement positif. On la note $U(., u_0)$, soit $U(t, u_0) = u(t), \ \forall t \in [0, T(u_0)[$.

On dit qu'un sous-ensemble E de $\mathbf{R}^N$ est *invariant* pour (1)-(2) si

$$(u_0 \in E) \Longrightarrow (\forall t \in [0, T(u_0)[, \ U(t, u_0) \in E).$$

III-1) *Question préliminaire.* Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite bornée de nombres réels. On désigne par L_n la borne supérieure de l'ensemble $\{a_p, p \geq n\}$. Montrer que $L = \lim_{n \to \infty} L_n$ existe et qu'il existe une suite extraite de la suite a_n convergeant vers L. En déduire que, de toute suite bornée de $\mathbf{R}^N$, on peut extraire une sous-suite convergente.

III-2) Etant donné E un sous-ensemble non vide de $\mathbf{R}^N$ et x dans $\mathbf{R}^N$, on note $d(x, E)$ la borne inférieure de l'ensemble $\{||x - y||_2, y \in E\}$ où $||.||_2$ désigne la norme euclidienne de $\mathbf{R}^N$.

On suppose que F est un ensemble fermé invariant pour (1)-(2). Montrer qu'alors

$$\forall u_0 \in F, \ \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} d(u_0 + t \, f(u_0), F) = 0. \tag{7}$$

III-3) Montrer que, si F est un sous-ensemble fermé, borné, non vide de $\mathbf{R}^N$ et x un élément de $\mathbf{R}^N$, il existe x_F dans F tel que

$$d(x, F) = ||x - x_F||_2.$$

Expliquer pourquoi cette propriété reste vraie si F est seulement fermé et non vide.

Montrer que si F est, de plus, convexe, c'est-à-dire

$$(z, y \in F) \Longrightarrow (\forall t \in [0, 1], t \, z + (1 - t) \, y \in F),$$

alors x_F est unique et est caractérisé par la propriété

$$x_F \in F \text{ et } \ \forall y \in F, < x - x_F, y - x_F > \leq 0 \tag{8}$$

où $< .,. >$ est le produit scalaire usuel dans $\mathbf{R}^N$. L'élément x_F sera appelé projection de x sur F. *(Indication : on pourra "dériver" en $t = 0$ la propriété $(||x - x_F||_2)^2 \leq (||x - (t \, y + (1 - t) \, x_F)||_2)^2$ pour tout y de F.)*

III-4) Lorque F est un convexe fermé non vide, pour x dans F, on appelle *cône normal extérieur à F en x* l'ensemble $N(x)$ des éléments p de $\mathbf{R}^N$ tels que

$$\forall y \in F, < p, y - x > \leq 0.$$

Vérifier que $N(x)$ est un cône convexe fermé non vide. *(Par définition, un sous-ensemble C de $\mathbf{R}^N$ est un cône si, pour tout p de C et tout $\lambda > 0$, λp est dans C.)*

Montrer ensuite que, si F est un *convexe* fermé, la relation (7) implique

$$\forall u_0 \in F,\ \forall p \in N(u_0),\ < p, f(u_0) > \leq 0. \qquad (9)$$

III-5) Montrer réciproquement que, si F est un convexe fermé de $\mathbf{R}^N$, la propriété (9) implique la propriété (7).*(On pourra d'abord remarquer que l'application*

$$\lambda \to \frac{1}{\lambda} d(u_0 + \lambda f(u_0), F)$$

est croissante sur $[0, +\infty[$ pour tout u_0 de F. Puis, on pourra considérer la projection x_λ de $u_0 + \lambda f(u_0)$ sur F et utiliser que, pour une certaine suite λ_n tendant vers 0, $\frac{1}{\lambda_n}(u_0 + \lambda_n f(u_0) - x_{\lambda_n})$ converge vers un élément p de $N(u_0)$.)

III-6) Soit v une fonction continue de $[0, T[$ dans $[0, \infty[$ telle que, pour tout t de $[0, T[$, il existe une suite $(h_n)_{n \geq 1}$ décroissant vers 0 vérifiant

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{v(t + h_n) - v(t)}{h_n} \leq \gamma\, v(t) \qquad (10)$$

où γ est une constante ne dépendant que de v. Montrer qu'alors

$$\forall t \in [0, T[,\ v(t) \leq v(0)\, e^{\gamma t}.$$

(Indication: on pourra considérer la fonction $w_\lambda(t) = e^{-\gamma t} v(t) - \lambda t$ où λ est un nombre strictement positif arbitraire et montrer par l'absurde que $\forall t \in [0, T[,\ w_\lambda(t) \leq w(0)$.)

III-7) Soit F un sous-ensemble fermé de $\mathbf{R}^N$ tel que, pour tout u_0 dans F, il existe une suite $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ décroissant vers 0 et vérifiant

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\lambda_n} d(u_0 + \lambda_n f(u_0), F) = 0.$$

Montrer que F est invariant pour (1)-(2). *(Indication: étant donné $u(t) = U(t, u_0)$ la solution de (1)-(2), on pourra introduire pour tout t de $[0, T[$ et tout h de $]0, T - t[$ les points x_t et $z_{t,h}$ de F tels que*

$$\begin{aligned} ||u(t) - x_t||_2 &= d(u(t), F) \\ ||x_t + h\, f(x_t) - z_{t,h}||_2 &= d(x_t + h\, f(x_t), F) \end{aligned}$$

et les utiliser pour montrer que la fonction $v(t) = d(u(t), F)$ vérifie (10) pour un certain γ).

III-8) *Applications.* Il s'agit d'expliciter ici l'étude précédente dans deux situations importantes liées à l'ordre usuel sur $\mathbf{R}^N$ défini par
$(x \leq \hat{x})$ si et seulement si
$(\forall i = 1, ..., N,\ x^i \leq \hat{x}^i$ où $x = (x^1, ..., x^N), \hat{x} = (\hat{x}^1, ..., \hat{x}^N))$.

III-8-a) Montrer que la *positivité est préservée* dans (1)-(2) au sens que

$$(u_0 \geq 0) \Longrightarrow (\forall t \in [0, T(u_0)[,\ U(t, u_0) \geq 0),$$

si et seulement si
- lorsque $N = 1$, $f(0) \geq 0$
- lorsque $N = 2$, $f_1(0, x_2) \geq 0$, $f_2(x_1, 0) \geq 0$ pour tous $x_1, x_2 \geq 0$ où $f = (f_1, f_2)$.

III-8-b) Montrer que *l'ordre est préservé* dans (1)-(2) au sens que

$$(u_0 \leq \hat{u}_0) \Longrightarrow (\forall t \in [0, T(u_0)[\cap[0, T(\hat{u}_0)[,\ U(t, u_0) \leq U(t, \hat{u}_0))$$

- toujours lorsque $N = 1$
- et, lorsque $N = 2$ et f différentiable, si et seulement si

$$\forall i, j = 1, 2, \text{ et } i \neq j,\ \forall x \in \mathbf{R}^2,\ \frac{\partial f_i}{\partial x^j}(x) \geq 0,$$