ENS

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

DURÉE : 4 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé pour toutes les épreuves d'admissibilité, sauf pour les épreuves de français et de langues. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

Il sera accordé une grande importance à la qualité et à la précision de la rédaction des parties de ce problème. Chaque partie peut être traitée indépendamment des autres, et tout résultat énoncé dans le texte du problème pourra être utilisé dans la suite du problème y compris dans des parties différentes, **le candidat devant préciser lorsqu'il utilise un résultat donné dans le texte.**

Tournez la page S.V.P.

Ce problème est consacré à l'étude d'intégrales présentant un grand paramètre k, du type

$$\int_X u(x)e^{-k\phi(x)}dx,$$

$X \subset \mathbb{R}$, où u est appelée l'amplitude et ϕ la phase, qui sont deux fonctions continues, éventuellement à valeurs complexes, sur X. La partie I étudie trois exemples. La partie II généralise les résultats obtenus dans les exemples de la partie I lors d'une intégration sur $\mathbb{R}$. La partie III présente un développement en fonction de toutes les puissances inverses de k de l'intégrale étudiée, après une application à la formule de Stirling. Les intégrales $\int_X u(x)e^{-k\phi(x)}dx$ s'étudient grâce à la méthode du col.

On désigne par $u^{(p)}$ pour $p \geq 1$ la dérivée $p-$ième d'une fonction u, de classe C^p sur l'intervalle $[0,1]$. On désigne indifféremment par $u^{(0)}$ ou par u la fonction u de classe C^0 sur $[0,1]$. L'ensemble des fonctions de classe C^k sur un intervalle $[a_1, a_2]$ est noté $C^k([a_1, a_2])$. On utilise les trois notations suivantes pour la dérivée première de la fonction f: $f^{(1)}$, $\frac{d}{dx}(f)$, f'.

Le candidat ne redémontrera pas l'égalité

$$\frac{d}{dx}(e^{iax}) = iae^{iax}$$

ni toutes les égalités similaires.

Enfin, le candidat justifiera l'existence de toutes les intégrales indéfinies étudiées dans ce problème. Il pourra cependant se reporter à une de ses précédentes justifications si cela est pertinent.

PARTIE I

1. Soit $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$. Soit $J = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, dxdy$.

1.a En utilisant le fait que tout disque $D(a)$ de rayon a contient un carré de côté $a\sqrt{2}$ et est contenu dans un carré de côté $2a$ démontrer que $I^2 = J$.

1.b Soit $\varepsilon_0 > 0$. On rappelle que le changement de variable en coordonnées polaires $(x, y) \to (r, \theta)$ est un difféomorphisme de

$$D(a) - D(\varepsilon_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \varepsilon_0^2 \leq x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

sur $[\varepsilon_0, a] \times]0, 2\pi]$. Démontrer que $J = \pi$. En déduire $I = \sqrt{\pi}$.

Dans les questions 2 à 5, ε désigne un réel strictement positif fixé.

2. Démontrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon x^2}\, dx = (\frac{\pi}{\varepsilon})^{\frac{1}{2}}$ pour tout $\varepsilon > 0$.

3. Soit $F_\varepsilon(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax - \varepsilon x^2}\, dx$.

3.a Démontrer que $|F_\varepsilon(a)| \leq (\frac{\pi}{\varepsilon})^{\frac{1}{2}}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

3.b Montrer que F_ε est solution de l'équation différentielle

$$F_\varepsilon'(a) + \frac{a}{2\varepsilon} F_\varepsilon(a) = 0.$$

3.c En déduire l'égalité

$$F_\varepsilon(a) = (\frac{\pi}{\varepsilon})^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{a^2}{4\varepsilon}}.$$

4. Soit $G_\varepsilon(b) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{bx - \varepsilon x^2}\, dx$ pour $b \in \mathbb{R}$.

Démontrer l'inégalité, valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, $bx - \frac{\varepsilon}{2} x^2 \leq \frac{b^2}{2\varepsilon}$. En déduire un majorant de $G_\varepsilon(b)$. Le réel ε étant fixé dans $\mathbb{R}_+^*$, ce majorant est-il uniforme en $b \in \mathbb{R}$?

Calculer $G_\varepsilon(b)$ (le candidat pourra utiliser un changement de variable simple pour se ramener au calcul du **2.**). Lorsque ε est fixé dans $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $G_\varepsilon(b)$ admet-elle un majorant ne dépendant pas de b?

5. Soit $\tilde{F}_\varepsilon(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{izx - \varepsilon x^2}, z \in \mathbb{C}$. Déterminer l'ensemble des z tels que cette intégrale existe. Calculer $\tilde{F}_\varepsilon(z)$ en fonction de la partie réelle de z, notée $\Re z$, de la partie imaginaire de z, notée $\Im z$, de ε et $F_\varepsilon(\Re z)$. L'exprimer à l'aide de z et de ε.

Tournez la page S.V.P.

Partie II

Cette partie est consacrée à l'étude d'un résultat démontré par Laplace. Il fournit une méthode de calcul d'équivalent d'intégrales de fonctions exponentielles.

Dans cette partie, on note $[x]$ l'unique entier tel que $[x] \leq x < [x]+1$.

7. Majoration des termes loin du maximum de e^{-x^2}.

7.a Déterminer en fonction de N la meilleure constante $C(N)$ telle que $x^N e^{-\frac{x^2}{2}} \leq C(N)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. (N entier strictement positif).

7.b Soit n un entier strictement positif donné. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, il existe C (dépendant de n, et on ne demande pas de déterminer la meilleure constante), telle que, pour tout $A \geq 0$

$$A^n \int_A^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq C.$$

(on pourra distinguer les cas $A \leq 1$ et $A \geq 1$, et dans le second cas, faire intervenir $\int_A^\infty x^n e^{-x^2} dx$ puis utiliser le résultat du **7.a**.)

7.c Démontrer que, pour tout $n \geq 0$ et pour tout $m \geq 0$, il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ (qui dépend donc de n et de m) telle

$$\forall A \geq 1, A^n \int_A^\infty x^m e^{-x^2} dx \leq M.$$

7.d Soit $A > 0$ fixé. Démontrer, pour tout n et pour tout m entiers que

$$\lim_{k \to \infty} k^n \int_A^\infty x^m e^{-kx^2} dx = 0.$$

Dans les trois questions suivantes, on identifie l'équivalent d'une intégrale de la forme $\int_{a_1}^{a_2} a(x) e^{k\phi(x)} dx$ lorsque ϕ vérifie certaines hypothèses.

8. (cas particulier $\phi(x) = -(x-x_0)^2 = \phi_*(x)$) Soit $a_1 < x_0 < a_2$. Démontrer que, pour tout $q \geq 1$, il existe un réel $D > 0$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{R}_+^*, \left| \int_{a_1}^{a_2} e^{-k(x-x_0)^2} dx - \sqrt{\frac{\pi}{k}} \right| \leq \frac{\mathrm{D}_q}{k^q}.$$

9. (On revient au cas général sur ϕ). Soit $\phi(x)$ une fonction réelle définie sur un intervalle $[a_1, a_2]$, de classe C^n sur cet intervalle, avec $n \geq 2$. On suppose qu'il existe un point $x_0 \in]a_1, a_2[$ tel que

- (i) pour tout $x \in [a_1, x_0[\cup]x_0, a_2]$, $\phi(x) < \phi(x_0)$,
- (ii) $\phi^{(2)}(x_0) \neq 0$.

9.a Démontrer qu'il existe un réel $\alpha_0 > 0$ tel que l'équation $\phi(y) = \phi(x_0) - \alpha_0$ admette exactement deux solutions x_- et x_+ dans l'intervalle $[x_1, x_2]$ et tel que $\phi^{(2)}(x)$ ne s'annule pas sur l'intervalle $[x_-, x_+]$. Quel est le signe de $\phi^{(2)}(x_0)$?

9.b Soit M un entier positif. On désigne par a une fonction de classe C^1 sur $[a_1, a_2]$. On note $I_-^M(k) = k^M \int_{a_1}^{x-} a(x)e^{k\phi(x)}dx$ et $I_+^M(k) = k^M \int_{x+}^{a_2} a(x)e^{k\phi(x)}dx$.

Démontrer que les deux fonctions $k \to e^{-k\phi(x_0)} I_-^M(k)$ et $k \to e^{-k\phi(x_0)} I_+^M(k)$ tendent vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$.

9.c L'une des hypothèses (i), (ii) est elle superflue pour obtenir à la fois les résultats de **9.a** et de **9.b**?

9.d Montrer qu'il existe une fonction $l(x)$, strictement positive sur $[x_-, x_+]$, que l'on pourra exprimer par une égalité de Taylor, telle que

$$\phi(x) = \phi(x_0) - \frac{1}{2}(x - x_0)^2(l(x))^2.$$

Montrer que l est une fonction continue, que sa valeur en x_0 est égale à $(-\phi''(x_0))^{\frac{1}{2}}$.

10. On suppose ϕ de classe C^4. Soit $R(a, \phi, k)$ défini par l'égalité

$$\int_{a_1}^{a_2} a(x)e^{k\phi(x)}dx = (\frac{2\pi}{-k\phi^{(2)}(x_0)})^{\frac{1}{2}} e^{k\phi(x_0)}[a(x_0) + k^{-\frac{1}{2}} R(a, \phi, k)].$$

En utilisant un changement de variable, dont on ne cherchera pas à expliciter la transformation réciproque, démontrer que $R(a, \phi, k)$ est bornée lorsque $k \geq 1$ tend vers $+\infty$. On pourra utiliser sans démonstration le fait que, pour r fonction continue sur $\mathbb{R}$, et pour tout $\alpha > 0$, $\beta > 0$, il existe une constante C telle que, pour tout $k \in \mathbb{R}_+^*$, $\int_{-\alpha}^{\beta} yr(y)e^{-k\frac{y^2}{2}}\, dy \leq C/k$.

Tournez la page S.V.P.

Les questions 11 à 13 précisent le développement en $\frac{1}{k}$ de l'intégrale dans le cas simple $\phi(x) = -\frac{1}{2}x^2$.

11.a Calculer, pour p entier supérieur ou égal à 0,

$$I_p = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!} e^{-k\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

(On écrira une relation de récurrence entre I_{p+1} et I_p.)

11.b Soit $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ une suite de nombres complexes donnés. Démontrer l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{x^j}{j!}) e^{-k\frac{x^2}{2}}\, dx = (\frac{2\pi}{k})^{\frac{1}{2}} (\sum_{p=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{a_{2p}}{2^p p!} k^{-p}).$$

12. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Démontrer que, pour tout A strictement positif et pour tout n entier positif, il existe une constante E (dépendant de A, de n et de f) telle que

$$\forall k \in \mathbb{R}_+^*, |\int_{-A}^{A} x^n f(x) e^{-kx^2/2} dx| \leq E k^{-n/2-1/2}.$$

13. Soit n un entier et soit h une fonction élément de $C^n(\mathbb{R})$. On définit, pour $A > 0$,

$$R_n(k, A, h) = \sqrt{k} \int_{-A}^{A} h(x) e^{-kx^2/2} dx - (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_{p=0}^{[n/2]} \frac{h^{(2p)}(0)}{2^p p!} k^{-p}.$$

Démontrer que, quel que soit $A > 0$, quelle que soit la fonction h élément de $C^n(\mathbb{R})$, et quel que soit n entier positif, il existe une constante E^1 telle que

$$\forall k \in \mathbb{R}_+^*, |R_n(k, A, h)| \leq E^1 k^{-n/2}.$$

Partie III

Cette partie présente une méthode d'approximation d'intégrales appelée méthode du col. Elle permettra de voir que la formule de Stirling généralisée, c'est-à-dire l'approximation de $n!$, est un cas particulier de cette méthode.

14. Formule de Stirling usuelle.

14.a Démontrer que, pour n entier positif

$$n! = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx.$$

On définit $\phi_0(t) = \ln t - t$ pour $t \in \mathbb{R}_+^*$. Exprimer $n!$ à l'aide de $\int_0^{\infty} e^{n\phi_0(t)} dt$.

14.b Démontrer que

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{n\phi_0(t)} dt \leq \frac{1}{2} e^{n\phi_0(\frac{1}{2})} \qquad \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} e^{n\phi_0(t)} dt \leq e^{(n-1)\phi_0(\frac{3}{2})}.$$

14.c Démontrer que

$$n! = n^n e^{-n}[(2\pi n)^{\frac{1}{2}} + O(\ 1\ )].$$

15 On introduit la fonction

$$\psi(t) = \begin{cases} -(-1 + t - \ln t)^{\frac{1}{2}} \text{ pour } t \in [\frac{1}{2}, 1] \\ (-1 + t - \ln t)^{\frac{1}{2}} \text{ pour } t \in [1, \frac{3}{2}] \end{cases}$$

Démontrer l'égalité

$$\psi(x) = (x - 1)\left(\int_0^1 \frac{(1 - t)dt}{(tx + (1 - t))^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On pourra utiliser une égalité de Taylor.

En déduire que ψ est de classe C^{∞} sur $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ et qu'elle définit un difféomorphisme de cet intervalle sur son image. On notera son application réciproque π. On ne cherchera pas à identifier π.

Tournez la page S.V.P.

16 Démontrer qu'il existe une suite de réels $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout N entier positif, il existe une constante C' telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\sqrt{n}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} e^{n\phi_0(t)}dt e^{-n\phi_0(1)} - (2\pi)^{\frac{1}{2}}\sum_{p=0}^{[\frac{N}{2}]}\frac{b_p}{n^p}\right| \leq C'n^{-[\frac{N}{2}]-1}.$$

Donner un procédé pour calculer les termes b_p et identifier b_0 et b_1.

17. On considère $R_j(n)$ défini par l'égalité

$$n! = n^n e^{-n}(2\pi n)^{\frac{1}{2}}[1 + \sum_{p=1}^{j} b_p n^{-p} + R_j(n)].$$

Démontrer qu'il existe une constante C'' telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait l'inégalité $R_j(n) \leq C''n^{-j-1}$.

18. En utilisant le développement de $\phi_0(t)$ en fonction de $t-1$ pour t au voisinage de 1, puis le changement de variable $T = \sqrt{n}(t-1)$, retrouver le résultat précédent.

19. Généraliser cette relation aux intégrales générales de la question **10.**, pour a de classe C^{2n} et ϕ de classe C^{2n+3} sur $[a_1, a_2]$, ϕ admettant les propriétés (i), (ii) de la question **9.**. On démontrera qu'il existe des coefficients $b_p(a, \phi, x_0)$ (cette notation étant utilisée pour rappeler que ces coefficients dépendent de a, ϕ et de ses dérivées au point x_0) **que l'on ne calculera pas** tels que, dans l'égalité

$$\int_{a_1}^{a_2} a(x)e^{k\phi(x)}dx = (\frac{2\pi}{-k\phi^{(2)}(x_0)})^{\frac{1}{2}}e^{k\phi(x_0)}[a(x_0)+\sum_{p=1}^{p=n-1}\frac{b_p(a,\phi,x_0)}{p!k^p}+k^{-n}R_n(a,\phi,k)]$$

la fonction $R_n(a, \phi, k)$ est bornée pour $k \geq 1$.