MATHÉMATIQUES

DURÉE: 4 HEURES

Pour les épreuves d'admissibilité, l'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé, une seule à la fois étant admise sur la table ou le poste de travail, et aucun n'échange n'est autorisé entre les candidats.

NOTATIONS ET DÉFINITIONS

Dans tout le problème on considère des matrices carrées $n \times n$ à coefficients réels, et on note $\mathcal{M}_n$ l'ensemble de ces matrices. Si M appartient à $\mathcal{M}_n$, m_{ij} désignera son coefficient sur la ligne i et la colonne j. On définit les sous-ensembles de $\mathcal{M}_n$ suivants :

$$GL_n = \{M \in \mathcal{M}_n; \det M \neq 0\}$$

$$O_n = \{M \in \mathcal{M}_n; {}^tMM = \mathbb{1}\}$$

où $\mathbb{1}$ est la matrice identité, n'ayant que des 1 sur la diagonale et nulle ailleurs,

$$\mathcal{A}_n = \{M \in \mathcal{M}_n; {}^tM = -M\}, \text{ l'ensemble des matrices antisymétriques,}$$

$$\mathcal{T}_n = \{M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n; m_{ij} = 0 \text{ si } i < j\}, \text{ l'ensemble des matrices triangulaires inférieures,}$$

et son sous-ensemble

$$\mathcal{P}_n = \{M = (m_{ij}) \in \mathcal{T}_n; \forall i,\ m_{ii} > 0\} .$$

Une application bilinéaire $\phi : E \times E \to F$, où E et F sont deux espaces vectoriels, est dite *alternée* si, pour tout $u \in E$, $\phi(u, u) = 0$.

Dérivation : si u est une fonction dérivable d'une variable réelle t, on note $\dot{u}(t_0)$ sa dérivée en t_0.

0. PRÉLIMINAIRES

On munit $\mathcal{M}_n$ de la norme suivante (qu'on ne demande pas de justifier)

$$\forall B \in \mathcal{M}_n,\ N(B) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n - \{0\}, \|x\| \leq 1} \frac{\|Bx\|}{\|x\|}$$

où $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ est la norme euclidienne de x.

1. Soit B une matrice de $\mathcal{M}_n$. Montrer que la série

$$\exp B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}$$

est convergente.

2. Justifier que $\exp(-B)$ est l'inverse de $\exp B$. En déduire que $\exp B$ appartient à GL_n.
3. Montrer que l'application $\phi : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n$, $t \mapsto \exp(tB)$ est une fonction de classe C^1 et calculer sa dérivée.
4. Montrer que B commute avec $\exp(tB)$.

Tournez la page S.V.P.

I. Équation de Lax

L'objectif est de résoudre certaines équations différentielles ordinaires du premier ordre $dL/dt = f(L)$ où L appartient à un sous-espace vectoriel $E \subset \mathcal{M}_n$.

1. On définit le *crochet* de deux matrices A, B de $\mathcal{M}_n$ par
$$[A, B] = AB - BA\,.$$
   (a) Montrer que $A, B \mapsto [A, B]$ est une application bilinéaire alternée.
   (b) Que peut-on dire de la trace de $[A, B]$?
   (c) Montrer que le crochet de deux matrices antisymétriques est une matrice antisymétrique.
   (d) Montrer que si $A, B \in \mathcal{T}_n$, alors $AB \in \mathcal{T}_n$ et $[A, B] \in \mathcal{T}_n$.
2. (a) Soit $t \mapsto A(t)$ une application de classe C^1 d'un intervalle I dans GL_n. Justifier que $t \mapsto A^{-1}(t)$ est également de classe C^1 et donner une expression simple de sa dérivée en fonction de la dérivée $\dot{A}$.
   (b) Soit maintenant X une matrice fixée. Dériver l'application $t \mapsto A(t)^{-1}XA(t)$ et montrer que
$$\frac{d}{dt}(A^{-1}XA) = [A^{-1}XA, A^{-1}\dot{A}]\,.$$
3. On considère l'équation différentielle ordinaire suivante dans $\mathcal{M}_n$ (dite de Lax) :
$$\begin{cases} \dot{L} = [L, M] \\ L(0) = X \end{cases} \tag{1}$$
   où $M = M(L)$ est une matrice dépendant continûment de L et X une matrice constante fixée. Montrer que si $t \mapsto L(t)$ est une solution de (1) sur un intervalle I, alors $\operatorname{Tr} L(t)$ est constante.
4. Dans toute la suite du problème L est une solution de (1). On rappelle que le spectre d'une matrice M est l'ensemble de ses valeurs propres (y compris complexes). Nous nous proposons d'étudier le spectre de $L(t)$ quand t varie.
   (a) Soit I un intervalle et $B : I \to \mathcal{M}_n$ une fonction de classe C^1 dont le déterminant ne s'annule jamais.
      i. On suppose ici que $B(0) = \mathbb{1}$; calculer la dérivée en zéro de $\det B$.
      ii. Calculer la dérivée de $\det B$ dans le cas général et pour tout t.
   (b) Montrer que si pour un certain $t_0 \in I$, $\det L(t_0) \neq 0$, alors $\det L$ est constant (non nul). Que peut-on dire de $\det(L(t) - \lambda \mathbb{1})$ où λ est un nombre complexe fixé ?
   (c) Conclure que le spectre de L ne varie pas avec t. On dit que la solution est *isospectrale*.
5. On suppose que X possède n valeurs propres réelles distinctes.
   (a) Montrer qu'il existe pour tout t une matrice $A(t)$ telle que $L(t) = A(t)^{-1}XA(t)$. Est-elle unique ?
   (b) En admettant que l'on peut choisir $t \mapsto A(t)$ de telle sorte que A soit de classe C^1, quelle équation différentielle A satisfait-elle (on pourra faire intervenir la matrice M) ?
   (c) Vérifier qu'une solution du système suivant dans $\mathcal{M}_n$
$$\begin{cases} \dot{A} = AM \\ A(0) = \mathbb{1} \end{cases} \tag{2}$$
   s'il en existe, satisfait l'équation différentielle de la question 5b. Justifier l'existence de solutions de (2). En déduire une façon de construire les solutions de (1). Que peut-on dire dans le cas où X n'a pas toutes ses valeurs propres distinctes ?
6. Déduire de ce qui précède la solution de (1) quand M est une matrice constante.

II. DÉCOMPOSITION DE MATRICES

1. (a) Montrer que $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{T}_n$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n$ et que $\mathcal{M}_n = \mathcal{A}_n \oplus \mathcal{T}_n$. On notera par la suite $\pi_1 : \mathcal{M}_n \to \mathcal{A}_n$ et $\pi_2 : \mathcal{M}_n \to \mathcal{T}_n$ les projections qui à un élément B associent les deux termes dans la somme directe (c'est-à-dire $B = \pi_1(B) + \pi_2(B)$).
   (b) Montrer que O_n et $\mathcal{P}_n$ sont des sous-groupes de GL_n.
   (c) Montrer que si $M \in \mathcal{A}_n$ alors $\exp M \in O_n$. De même si $M \in \mathcal{T}_n$, $\exp M \in \mathcal{P}_n$.
   (d) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que si $R : I \to O_n$ (respectivement $T : I \to \mathcal{P}_n$) est une application de classe C^1, alors $R^{-1}\dot{R}$ (resp. $T^{-1}\dot{T}$) est à valeur dans $\mathcal{A}_n$ (resp. $\mathcal{T}_n$).
2. (a) Montrer que tout élément $B \in GL_n$ peut s'écrire comme le produit RT d'une matrice $R \in O_n$ par une matrice $T \in \mathcal{P}_n$ (on pourra s'inspirer de la décomposition de GRAM-SCHMIDT).
   (b) Montrer que cette décomposition est unique. On notera respectivement Π_1 et Π_2 les applications de GL_n dans $\mathcal{M}_n$ qui à B associent les éléments $R \in O_n$ et $T \in \mathcal{P}_n$ issus de la décomposition de la question II.2a.
   (c) Soit I un intervalle et $B : I \to \mathcal{M}_n$ une application de classe C^1 telle que $\forall t \in I$, $B(t) \in GL_n$. Pour tout $t \in I$, on pose $R(t) = \Pi_1(B(t))$ et $T(t) = \Pi_2(B(t))$. Montrer que R et T sont des applications de classe C^1 à valeur dans $\mathcal{M}_n$.
3. On veut résoudre l'équation dans $\mathcal{M}$:

$$\begin{cases} \dot{L} = [L, \pi_1(L)] \\ L(0) = X \end{cases} \tag{3}$$

   (a) On cherche la solution sous la forme $A(t)^{-1}XA(t)$. Donner une équation différentielle pour A et une condition en $t = 0$ qui garantissent que $L : t \mapsto A(t)^{-1}XA(t)$ satisfait (3).
   (b) Montrer que $A(t) = (\Pi_1(\exp(tX)))$ est la solution.

III. RÉSEAU DE TODA

On considère n particules de masse 1 se déplaçant sur une droite, de position q_i et vitesse p_i pour i entre 1 et n. Par souci de concision, on notera q le n-uple $(q_1, \dots, q_n)$; de même pour p.

La i-ème particule est repoussée par les particules $i-1$ et $i+1$ et subit une accélération $\ddot{q}_i = \dot{p}_i = -2e^{2(q_i - q_{i+1})} + 2e^{2(q_{i-1} - q_i)}$ (équation de NEWTON) ; la formule est modifiée aux deux extrémités : $\ddot{q}_1 = \dot{p}_1 = -2e^{2(q_1 - q_2)}$ et $\ddot{q}_n = \dot{p}_n = 2e^{2(q_{n-1} - q_n)}$.

On considérera le système différentiel de $2n$ équations à $2n$ fonctions inconnues issu des équations ci-dessus :

$$\begin{cases} \dot{q}_i = p_i & \text{pour } 1 \le i \le n \\ & \\ \dot{p}_1 = -2e^{2(q_1 - q_2)} & \\ \dot{p}_i = -2e^{2(q_i - q_{i+1})} + 2e^{2(q_{i-1} - q_i)} & \text{pour } 1 < i < n \\ \dot{p}_n = 2e^{2(q_{n-1} - q_n)} & \end{cases} \tag{$\star$}$$

avec les conditions initiales $q(0) = \bar{q}$, $p(0) = \bar{p}$.

1. Vérifier que le système $(\star)$ satisfait les conditions de Cauchy-Lipschitz pour l'existence d'une solution sur un intervalle (non précisé) $I =]-\epsilon, \epsilon[$. On notera par la suite $t \mapsto (q(t), p(t))$ une telle solution.
2. On définit l'énergie mécanique du système par :

$$H(q, p) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} e^{2(q_i - q_{i+1})} .$$

   Vérifier que $t \mapsto H(q(t), p(t))$ est constant. On dit que la fonction H est une *intégrale première* du mouvement.

Tournez la page S.V.P.

3. Vérifier que la fonction $P : (q,p) \mapsto \sum_{i=1}^n p_i$ est aussi une intégrale première.
4. Soit Q la fonction $(q,p) \mapsto \sum_{i=1}^n q_i$. Que peut-on dire de la fonction $t \mapsto Q(q(t),p(t)) - tP(q(t),p(t))$?
5. On suppose désormais que $\sum_i p_i = 0$. Considérons les matrices $n \times n$ suivantes

$$L = \begin{pmatrix} p_1 & e^{q_1-q_2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ e^{q_1-q_2} & p_2 & e^{q_2-q_3} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{q_2-q_3} & p_3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & p_{n-1} & e^{q_{n-1}-q_n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & e^{q_{n-1}-q_n} & p_n \end{pmatrix}$$

et

$$M = \begin{pmatrix} 0 & e^{q_1-q_2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -e^{q_1-q_2} & 0 & e^{q_2-q_3} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -e^{q_2-q_3} & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & e^{q_{n-1}-q_n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -e^{q_{n-1}-q_n} & 0 \end{pmatrix}$$

autrement dit

$$\ell_{ij} = \begin{cases} p_i & \text{si } i = j \\ e^{q_i-q_{i+1}} & \text{si } j = i+1 \\ e^{q_j-q_{j+1}} & \text{si } i = j+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad m_{ij} = \begin{cases} e^{q_i-q_{i+1}} & \text{si } j = i+1 \\ -e^{q_j-q_{j+1}} & \text{si } i = j+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que L satisfait une équation de Lax de type (3). En déduire l'expression générale de la solution.

6. Résoudre explicitement $(\star)$ dans le cas $n = 2$, $p_1 + p_2 = q_1 + q_2 = 0$, avec la condition initiale $q_1(0) = x$ et $p_1(0) = 0$.