MATHÉMATIQUES

DURÉE: 4 HEURES

L'usage de toute calculatrice est interdit

L'épreuve se compose de deux problèmes indépendants que les candidats peuvent traiter dans l'ordre de leur choix.

Problème I

On se propose d'étudier la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{(n!)^2}$, où $x \in \mathbb{R}$; on rappelle que $\int_0^{+\infty} \exp(-\frac{x^2}{2})dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et que par convention $0! = 1$.

I.1/ Montrer que la série est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. On note $f(x)$ sa somme. Montrer que f est une fonction de classe C^1.

I.2/ Quelle est la limite en $x = +\infty$ de $f(x)$?

On se propose de calculer un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$. On introduit la fonction

$$g_x(\theta) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} e^{in\theta}.$$

I.3/ Montrer que $g_x(\theta)$ est bien définie comme fonction de θ, périodique et de classe C^1 et donner une expression explicite de $g_x(\theta)$ comme fonction de $z = xe^{i\theta}$.

Tournez la page S.V.P.

I.4/ Calculer les coefficients de Fourier de $g_x(\theta)$ et en déduire que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g_x(\theta)|^2 d\theta = f(x^2).$$

I.5/ Étudier la convergence de la suite $(|g_p|^2)_{p\in\mathbb{N}}$ de fonctions de θ lorsque $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, et en déduire que

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} |g_x(\theta)|^2 d\theta = 0.$$

I.6/ Montrer que, pour $x > 0$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x\cos\theta} d\theta = \frac{e^{2x}}{\sqrt{x}} \int_0^{2\sqrt{x}} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2 - \frac{u^2}{4x}}} du.$$

On prendra garde de justifier l'existence des diverses intégrales rencontrées dans le calcul.

I.7/ Montrer que si $0 \leq \lambda \leq 1/2$, alors

$$|\frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} - 1| \leq \lambda\sqrt{2},$$

et en déduire que pour $x \to +\infty$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x\cos\theta} d\theta \sim \frac{e^{2x}}{\sqrt{x}} \int_0^{2\sqrt{x}} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2}} du,$$

puis que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x\cos\theta} d\theta \sim \frac{e^{2x}}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2}} du.$$

Quel est donc un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$?

Problème II

Ensembles de Besicovitch

On considère la bande $\mathcal{D}$ du plan $\mathbb{R}^2$ définie par $x \in [0,1]$, où (x,y) sont les coordonnées d'un point dans le repère orthonormé usuel. On appelle ensemble de Besicovitch toute partie K de $\mathcal{D}$ ayant la propriété suivante : pour tout réel $p \in [0,1]$ (la pente), K contient un segment de droite, rejoignant le côté gauche de la bande ($x = 0$) à son côté droit ($x = 1$), et ayant p pour pente. Autrement dit,

$$\forall p \in [0,1],\ \exists b \in \mathbb{R},\ \forall x \in [0,1]\,,\ (x, px+b) \in K.$$

On va montrer qu'il existe des ensembles de Besicovitch dont l'aire est aussi petite que l'on veut.

L'ensemble des notations introduites dans chaque partie est conservé pour les parties suivantes.

On se donne $N \in \mathbb{N}$, avec $N \geq 2$.

Première partie : construction

II.1/ Montrer que la partie T définie par $T = \{(x, y),\ x \in [0,1],\ x \geq y \geq 0\}$ est un ensemble de Besicovitch. Quelle est son aire ?

II.2/ Soient $q_1, q_2, \cdots, q_N \in \{0, 1, \cdots, N-1\}$ des nombres entiers, et notons $q \in \mathbb{Q}$ le nombre rationnel défini par

$$q = \sum_{k=1}^{N} \frac{q_k}{N^k}.$$

a) Montrer que $q \in [0, 1[$.

b) Montrer que si $r_1, r_2, \cdots, r_N \in \{0, 1, \cdots, N-1\}$ sont tels que

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{r_k}{N^k} = \sum_{k=1}^{N} \frac{q_k}{N^k},$$

alors $\forall k \in \{1, \cdots, N\}$, $r_k = q_k$.

c) A q on associe la fonction l_q de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$,

$$l_q(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{q_k(Nx - k + 1)}{N^{k+1}}.$$

On définit le segment L_q comme l'ensemble $\{(x, l_q(x)),\ x \in [0,1]\}$ de $\mathbb{R}^2$. Quelle est la pente de L_q ?

II.3/ Soit $\delta \in [0,1]$. On considère la bande B_q^δ, définie par

$$(x, y) \in B_q^\delta \Longleftrightarrow x \in [0,1],\ |y - l_q(x)| \leq \delta.$$

a) Montrer que B_q^δ est contenue dans une partie compacte de $\mathcal{D}$ indépendante de δ et de q.

b) Montrer que B_q^δ contient un segment de pente p pour tous les p dans l'intervalle $[q - 2\delta, q + 2\delta]$.

II.4/ On appelle $\mathcal{Q}_N$ l'ensemble des nombres q qui s'écrivent de la forme décrite dans la question II.2 :

$$q \in \mathcal{Q}_N \Longleftrightarrow \exists q_1, q_2, \cdots, q_N \in \{0, 1, \cdots, N-1\},\ q = \sum_{k=1}^{N} \frac{q_k}{N^k}.$$

(C'est l'ensemble des nombres de $[0, 1[$ dont la représentation en base N n'a pas plus de N "chiffres".)
On fixe $\delta = N^{-N}$ et l'on définit alors l'ensemble $K_N = \cup_{q \in \mathcal{Q}_N} B_q^\delta$.

a) On fixe $N = 2$. Représenter graphiquement l'ensemble K_2 et montrer qu'il s'agit d'un ensemble de Besicovitch.

b) On revient au cas général, $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, montrer que K_N est un ensemble de Besicovitch.

Deuxième partie : partition des pentes

Soit $m \in \{1, \cdots, N\}$ un entier, et $\mathcal{R}_m$ la relation définie sur $\mathcal{Q}_N$ par

$$q\mathcal{R}_m\tilde{q} \Longleftrightarrow \forall k \leq m-1, \; q_k = \tilde{q}_k.$$

II.5/ Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence et en déduire une partition de l'ensemble $\mathcal{Q}_N$.

II.6/ Caractériser les classes d'équivalence de $\mathcal{R}_m$ et montrer qu'il y en a N^{m-1}. Quel est le cardinal de chacune ?

II.7/ Montrer que si deux nombres q et $\tilde{q}$ de $\mathcal{Q}_N$ sont équivalents pour la relation $\mathcal{R}_m$, alors, si $x \in [\frac{m-1}{N}, \frac{m}{N}]$ on a

$$|l_q(x) - l_{\tilde{q}}(x)| \leq \sum_{k=m}^{N} \frac{(k-m+1)|q_k - \tilde{q}_k|}{N^{k+1}}.$$

En déduire que

$$|l_q(x) - l_{\tilde{q}}(x)| \leq \frac{C}{N^m},$$

où C est une constante indépendante de $x, m, q, \tilde{q}, N$.

II.8/ Soit $x_0 \in [0,1]$ et $A_{x_0} = \{l_q(x_0), \; q \in \mathcal{Q}_N\}$. Montrer qu'il existe un entier $m \in \{1, \cdots, N\}$ tel que A_{x_0} soit contenu dans la réunion de N^{m-1} intervalles de $\mathbb{R}$ (non nécessairement disjoints), chacun de longueur au plus CN^{-m}.

Troisième partie : calcul de l'aire

II.9/ On conserve $x_0 \in [0,1]$ fixé.

a) On appelle D_{x_0} la droite d'équation $x = x_0$, et on considère son intersection avec une bande B_q^δ de l'ensemble K_N. Montrer que cette intersection est un intervalle de longueur 2δ. On notera par la suite $t_{x_0}^q$ la fonction caractéristique de cet intervalle.

b) Montrer qu'il existe $m \in \{1, \cdots, N\}$ tel que l'ensemble $K_N \cap D_{x_0}$ est contenu dans la réunion de N^{m-1} intervalles (non nécessairement disjoints), chacun de longueur au plus $CN^{-m} + 2N^{-N}$ (un dessin pourra utilement guider le raisonnement).

II.10/ On appelle t_{x_0} la fonction caractéristique de l'ensemble $K_N \cap D_{x_0}$. Montrer que

$$t_{x_0}(y) = \sup_{q \in \mathcal{Q}_N} t_{x_0}^q(y)$$

et en déduire qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a < b$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a

$$0 \leq t_{x_0}(y) \leq \chi_{[a,b]}(y)$$

où $\chi_{[a,b]}$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[a,b]$. Retrouver ainsi le résultat de la question II.3.a.

II.11/ On définit alors

$$h(x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} t_{x_0}(y)\, dy.$$

a) Montrer que $h(x_0)$ est bien définie.

b) Que représente géométriquement $h(x_0)$?

c) Montrer que $h(x_0) \leq (C+2)/N$.

II.12/ On admet que la fonction $h(x)$ définie pour $x \in [0,1]$ est affine par morceaux. En déduire que $A_N = \int_0^1 h(x)\, dx$ est bien définie. Expliquer brièvement pourquoi il s'agit de l'aire de K_N.

II.13/ Montrer que $\lim_{N \to +\infty} A_N = 0$.
Pourquoi l'ensemble K_N est-il une réponse au problème initialement posé ?

II.14/ En déduire qu'il existe dans le plan des ensembles contenant un segment de longueur au moins 1 dans toutes les directions et dont l'aire est aussi petite que l'on veut.