CX9611

Banque commune **École Polytechnique – ENS de Cachan**

PSI

Session 2009

Épreuve de Mathématiques

Durée : 4 **heures**

Aucun document n'est autorisé

L'usage de calculatrice électronique de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé selon la circulaire n°99018 du 1^er^ février 1999. De plus, une seule calculatrice est admise sur la table, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Préambule

Dans tout le texte $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{C})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes, m colonnes et à coefficients complexes ; on notera I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{C})$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, le spectre $\mathrm{Sp}(A)$ de A est le sous-ensemble de $\mathbf{C}$ constitué des valeurs propres de A. Si $A = [a_{i,j}]_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{C})$, on notera $A^* = {}^t\overline{A} = [\overline{a_{j,i}}]_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\ 1\leqslant i\leqslant n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$ le conjugué de la transposée de A. On identifiera les vecteurs de $\mathbf{C}^n$ avec les éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$. On utilisera la notation $\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ pour désigner la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dont les coefficients diagonaux sont les λ_i.

L'espace vectoriel $\mathbf{C}^n$ est muni du produit scalaire hermitien,

$$(x, y) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n \mapsto \langle x|y\rangle = x^*y \in \mathbf{C}$$

et pour tout sous-espace vectoriel F de $\mathbf{C}^n$, on note $F^\perp$ l'orthogonal de F dont on rappelle qu'il est de dimension

$$\dim F^\perp = n - \dim F.$$

Étant donnés des vecteurs $v_1, \cdots, v_k$ de $\mathbf{C}^n$, le sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^n$ qu'ils engendrent sera noté $\mathrm{Vect}(v_1, \cdots, v_k)$. Dans le problème nous aurons besoin du vocabulaire suivant : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est dite

- *hermitienne* si $A^* = A$;
- *anti-hermitienne* si $A^* = -A$;
- *unitaire* si $AA^* = I_n$.

Aucune connaissance spécifique sur ces matrices n'est requise à l'exception du théorème de réduction suivant que l'on *admet* ; quand son invocation sera nécessaire pour répondre à la question posée, *nous le signalerons systématiquement dans le texte.*

Théorème T.

- *Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice hermitienne. Il existe une matrice unitaire U telle que U^*HU est diagonale réelle.*
- *Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice anti-hermitienne. Il existe une matrice unitaire U telle que U^*HU est diagonale imaginaire pure.*

Pour X et Y des parties de $\mathbf{C}$, $X + Y$ désigne la partie de $\mathbf{C}$ dont les éléments sont ceux qui peuvent s'écrire sous la forme $x + y$ avec $x \in X$ et $y \in Y$:

$$X + Y = \{x + y \in \mathbf{C} \ / \ x \in X \text{ et } y \in Y\}.$$

De même $XY = \{xy \in \mathbf{C} \ / \ x \in X \text{ et } y \in Y\}$. On notera enfin

$$\mathbf{P} = \{z \in \mathbf{C} \ / \ \mathrm{Re}\,(z) > 0\},$$

où $\mathrm{Re}\,(z)$ (resp. $\mathrm{Im}(z)$) désigne la partie réelle (resp. imaginaire) du nombre complexe z.

Première partie

1) Pour tout nombre réel α, on définit les matrices

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 1 \\ \alpha(1-\alpha)-1 & \alpha \end{pmatrix} \text{ et } B(\alpha) = \begin{pmatrix} 1+\alpha & 1 \\ -\alpha(1+\alpha)-1 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Calculez $\mathrm{Sp}(A(\alpha))$, $\mathrm{Sp}(B(\alpha))$ et $\mathrm{Sp}\Big(A(\alpha)+B(\alpha)\Big)$.

2) En vous aidant des matrices $A(\alpha)$ et $B(\alpha)$, justifiez le fait que l'on ne peut pas en général, borner $\mathrm{Sp}(A+B)$ en fonction seulement de $\mathrm{Sp}(A)$ et $\mathrm{Sp}(B)$.

3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ hermitienne ; *d'après le théorème* T, A est diagonalisable dans une base orthonormée $(v_1, \cdots, v_n)$ de vecteurs de $\mathbf{C}^n$. Pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, on note λ_i la valeur propre associée à v_i et on suppose que celles-ci sont ordonnées par ordre croissant, c'est à dire

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n.$$

Pour $k \in \{1, \cdots, n\}$, on note $\mathcal{E}_k$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k de $\mathbf{C}^n$.

3-a) Montrez que pour tout $F \in \mathcal{E}_k$, la dimension de $F \cap \mathrm{Vect}(v_k, v_{k+1}, \cdots, v_n)$ est supérieure ou égale à 1.

3-b) Pour $F \in \mathcal{E}_k$, montrez qu'il existe un vecteur non nul $x \in F$ tel que $\dfrac{x^*Ax}{x^*x} \geqslant \lambda_k$.

3-c) Donnez un sous-espace vectoriel F appartenant à $\mathcal{E}_k$ tel que $\displaystyle\max_{x \in F\setminus\{0\}} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \lambda_k$.

3-d) Déduisez de ce qui précède que pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, on a

$$\lambda_k = \min_{F \in \mathcal{E}_k} \max_{x \in F\setminus\{0\}} \frac{x^*Ax}{x^*x}.$$

3-e) Soient A, B des matrices hermitiennes de valeurs propres respectives

$$\lambda_1(A) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n(A), \quad \lambda_1(B) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n(B).$$

On classe de même les valeurs propres $\lambda_1(A+B) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n(A+B)$ de $A+B$. Montrez que, pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, on a

$$\lambda_k(A) + \lambda_1(B) \leqslant \lambda_k(A+B) \leqslant \lambda_k(A) + \lambda_n(B).$$

Deuxième partie

4) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on note $\mathcal{V}(A)$ le sous-ensemble de $\mathbf{C}$ défini par

$$\mathcal{V}(A) = \Big\{ \frac{x^*Ax}{x^*x} \in \mathbf{C} \ / \ x \in \mathbf{C}^n\setminus\{0\} \Big\}.$$

4-a) Pour $A = [a_{i,j}]_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, montrez que pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $a_{i,i} \in \mathcal{V}(A)$.

4-b) On note $H(A) = \frac{A+A^*}{2}$. Montrez que $\mathcal{V}(H(A)) = \mathrm{Re}\Big(\mathcal{V}(A)\Big)$.

4-c) Montrez que pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on a $\mathcal{V}(A+B) \subset \mathcal{V}(A) + \mathcal{V}(B)$.

4-d) Montrez que pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on a $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathcal{V}(A)$.

4-e) Montrez que pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on a $\mathrm{Sp}(A+B) \subset \mathcal{V}(A) + \mathcal{V}(B)$.

4-f) Montrez que pour $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ des nombres réels,

$$\mathcal{V}\Big(\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)\Big) = [\lambda_1, \lambda_n].$$

4-g) Montrez que si U est unitaire alors $\mathcal{V}(U^*AU) = \mathcal{V}(A)$.

4-h) *En utilisant le théorème T*, déterminez $\mathcal{V}(A)$ dans le cas où A est une matrice hermitienne.

4-i) Montrez que pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $\mathcal{V}(A)$ est une partie compacte de $\mathbf{C}$.

5) On rappelle qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est dite *nilpotente* s'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que A^m est la matrice nulle.

5-a) Montrez, en utilisant par exemple le théorème de Cayley-Hamilton, que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est nilpotente si et seulement si $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.

5-b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $\mathcal{V}(A) = \{0\}$.

i) Montrez que A est nilpotente.

ii) Montrez que $\mathrm{Ker}\, A = (\mathrm{Im}\, A)^{\perp}$.

iii) Déduisez des questions précédentes que A est la matrice nulle.

Troisième partie

6) Soit $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Pour $i \in \{1, \cdots, n\}$, on note

$$L_i(A) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|, \qquad C_i(A) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{j,i}|.$$

6-a) On suppose que pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, on a $|a_{i,i}| > L_i(A)$. Montrez que A est inversible.

6-b) Déduisez de la question précédente que $\mathrm{Sp}(A) \subset G(A) \cap G({}^tA)$ où

$$G(A) = \bigcup_{i=1}^{n} \{z \in \mathbf{C} \ / \ |z - a_{i,i}| \leqslant L_i(A)\}.$$

7) Un sous-ensemble X de $\mathbf{C}$ est dit *convexe* s'il vérifie la propriété suivante :

$$\forall (x_1, x_2) \in X \times X, \quad \forall t \in [0,1], \quad tx_1 + (1-t)x_2 \in X.$$

7-a) Montrez que l'intersection d'une famille quelconque de sous-ensembles convexes de $\mathbf{C}$ est un sous-ensemble convexe de $\mathbf{C}$.

7-b) Montrez que pour toute partie X de $\mathbf{C}$, il existe un plus petit ensemble convexe contenant X : on le note $\mathrm{Conv}(X)$ et on l'appelle l'*enveloppe convexe* de X.

7-c) Montrez que $\mathrm{Conv}(X)$ est égal à l'ensemble :

$$\Big\{\sum_{i=1}^{n} t_i x_i \,/\, n \geqslant 1,\ \{x_1, \cdots, x_n\} \subset X,\ \forall i \in \{1, \cdots, n\},\ t_i \geqslant 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} t_i = 1\Big\}.$$

7-d) Soit K un convexe fermé de $\mathbf{C}$ qui ne contient pas 0. Montrez qu'il existe un unique $z_0 \in K$ tel que $|z_0| = \min_{z \in K} |z|$.

7-e) Construisez une droite du plan complexe d'équation $f(z) = 0$ de la forme $f(z) = a\mathrm{Re}\,(z) + b\,\mathrm{Im}(z) + c$ où $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ et telle que $c < 0$ et $f(z) > 0$ pour tout $z \in K$.

7-f) Montrez qu'un convexe fermé K de $\mathbf{C}$ ne contient pas 0 si et seulement s'il existe un réel θ tel que $e^{i\theta} K$ soit contenu dans $\mathbf{P}$.

8) Pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, on pose $E_i(A) = \frac{L_i(A) + C_i(A)}{2}$ ainsi que

$$G_{\mathcal{V}}(A) = \mathrm{Conv}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} \{z \in \mathbf{C} \text{ tel que } |z - a_{i,i}| \leqslant E_i(A)\}\Big);$$

dont *on admet* qu'il est fermé.

8-a) Montrez que $0 \notin G_{\mathcal{V}}(A)$, si et seulement s'il existe un réel θ tel que $G_{\mathcal{V}}(e^{i\theta} A) \subset \mathbf{P}$.

8-b) Montrez que $G_{\mathcal{V}}(A) \subset \mathbf{P}$ si et seulement si pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, on a $\mathrm{Re}\,(a_{i,i}) > E_i(A)$.

8-c) On suppose que $G_{\mathcal{V}}(A) \subset \mathbf{P}$ et on rappelle que $H(A)$ désigne la matrice hermitienne $\frac{A+A^*}{2}$. En remarquant que $L_i(H(A)) \leqslant E_i(A)$, montrez que $\mathrm{Sp}(H(A)) \subset \mathbf{P}$ et déduisez-en que $\mathcal{V}(A) \subset \mathbf{P}$.

8-d) Montrez que $0 \notin G_{\mathcal{V}}(A)$ implique $0 \notin \mathcal{V}(A)$.

8-e) Déduisez de ce qui précède que $\mathcal{V}(A) \subset G_{\mathcal{V}}(A)$.

Quatrième partie

Le *rayon spectral* d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est défini par

$$\rho(A) = \max\{|z| \text{ tel que } z \in \mathrm{Sp}(A)\}.$$

D'après la compacité de $\mathcal{V}(A)$ prouvée à la question 4-i), on définit le *rayon numérique* de A par

$$r(A) = \max\{|z| \text{ tel que } z \in \mathcal{V}(A)\}.$$

Étant donnée une norme $||\,.\,||$ sur $\mathbf{C}^n$, la norme $|||\,.\,|||$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ subordonnée à $||\,.\,||$ sur $\mathbf{C}^n$ est définie par la formule suivante :

$$|||A||| = \sup_{x\in\mathbf{C}^n,\ ||x||=1} ||Ax||.$$

Pour $x \in \mathbf{C}^n$ et $i \in \{1, \cdots, n\}$, on notera x_i sa i-ème coordonnée.

9) Une norme matricielle $|||\,.\,|||$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est par définition une norme telle que pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on a $|||AB||| \leqslant |||A|||.|||B|||$.

9-a) Montrez qu'une norme subordonnée est une norme matricielle.

9-b) On note $|||\,.\,|||_2$ la norme subordonnée à la norme $||\,.\,||_2$ définie par $||x||_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}$. En utilisant le *théorème* T, montrez que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $|||A|||_2$ est égale à la racine carrée positive de la plus grande des valeurs propres de A^*A.

9-c) *On admet* que les normes $|||\,.\,|||_1$ et $|||\,.\,|||_\infty$ subordonnées respectivement aux normes $||x||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ et $||x||_\infty = \max_{i=1,\cdots,n} |x_i|$ sont données par les formules

$$|||A|||_1 = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|, \qquad |||A|||_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$

i) Montrez que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $\rho(A) \leqslant r(A)$.

ii) Montrez, en utilisant 8-e), que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$,

$$r(A) \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \Big(|a_{i,j}| + |a_{j,i}|\Big).$$

iii) Déduisez des questions précédentes que $\rho(A) \leqslant r(A) \leqslant \frac{|||A|||_1+|||A|||_\infty}{2}$.

10) On note désormais $r : \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathbf{R}_+$ la fonction qui à A associe $r(A)$.

10-a) Montrez que r est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

10-b) Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculez $\mathcal{V}(A)$, $\mathcal{V}(B)$, $\mathcal{V}(A)\mathcal{V}(B)$ et $\mathcal{V}(AB)$. La norme définie par r est-elle matricielle ?

10-c) Montrez que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on a $r(A) \leqslant |||A|||_2$; en utilisant le *théorème* T montrez que l'on a égalité si A est hermitienne ou anti-hermitienne.

10-d) En écrivant $A = \frac{A+A^*}{2} + \frac{A-A^*}{2}$ montrez que $|||A|||_2 \leqslant 2r(A)$.

10-e) Déduisez de ce qui précède que $4r$ est une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

10-f) Montrez que pour c réel strictement positif, cr est une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ si et seulement si $c \geqslant 4$.

FIN DE L'ÉPREUVE