ÉCOLE POLYTECHNIQUE **FILIÈRE MP**

CONCOURS D'ADMISSION 1999

PREMIÈRE COMPOSITION DE PHYSIQUE

(Durée : 3 heures)

L'utilisation des calculatrices **est autorisée** pour cette épreuve.

⋆ ⋆ ⋆

Collisions nucléaires et fragmentation

Dans ce problème on considère des collisions entre noyaux atomiques, qui permettent d'étudier les propriétés dynamiques de la matière constituant ces noyaux. On s'intéressera en particulier à la réponse de cette matière à une compression, due au recouvrement des deux noyaux lors de la collision. On rappelle qu'un noyau est constitué de A nucléons (N neutrons non chargés, Z protons portant chacun une charge élémentaire positive e, avec $N + Z = A$). On assimile le noyau de masse $M_A = mA$ à une sphère homogène de rayon $R = r_0 A^{1/3}$ et de charge totale $Q = Ze$ (supposée uniformément répartie à l'intérieur de la sphère de rayon R). On admettra que les distributions de charge restent toujours uniformes lors de la collision, et on supposera les deux noyaux initialement infiniment éloignés l'un de l'autre.

Le noyau cible (indice 1) est initialement au repos. On note O l'origine du référentiel du laboratoire par rapport auquel est mesurée E_{lab}, énergie cinétique initiale du noyau projectile (indice 2).

Les ordres de grandeur des énergies mises en jeu dans ce problème justifient l'emploi de la mécanique non-relativiste.

Pour les applications numériques, on utilisera le mégaélectronvolt (1 MeV $= 10^6$ eV) et le femtomètre (1 fm $= 10^{-15}$ m), bien adaptés aux ordres de grandeur de la physique considérée ici. On donne :

Énergie de masse du neutron ou du proton	mc^2	$=$	10^3 MeV
Constante de couplage électrostatique	$e^2/4\pi\varepsilon_0$	$=$	$1,44$ MeV.fm
Paramètre de rayon	r_0	$=$	$1,16$ fm
Paramètre de compressibilité	K	$=$	250 MeV

Première partie
Analyse cinématique d'une collision

1. Cinématique du problème à deux corps.

Dans cette question on analyse le mouvement l'un par rapport à l'autre des deux noyaux considérés comme ponctuels. On repère les deux noyaux par les positions $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ de leurs centres de masse, respectivement pour la cible et le projectile.

1.a) Rappeler la définition des vecteurs $\vec{R}_G$, position du centre de masse G, et $\vec{r}$, position relative du projectile par rapport à la cible, en fonction de $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$. Donner également les expressions de $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ en fonction de $\vec{R}_G$ et $\vec{r}$.

b) On définit la quantité de mouvement relative des deux noyaux par la relation croisée :

$$\vec{p} = \frac{A_1\vec{p}_2 - A_2\vec{p}_1}{A_1 + A_2}. \tag{1}$$

où $\vec{p}_1$ et $\vec{p}_2$ sont les quantités de mouvement des deux noyaux.

Exprimer $\vec{p}$ en fonction de la vitesse relative $\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ et de la masse réduite μ du mobile équivalent, elle-même fonction de A_1 et A_2.

c) On appelle $\vec{P}$ la quantité de mouvement totale du système. Rappeler la définition du moment cinétique total $\vec{L}$ du système par rapport à l'origine O du repère. Exprimer le moment cinétique $\vec{\ell}$ dans le référentiel barycentrique en fonction de $\vec{r}$ et $\vec{p}$, ainsi que $\vec{L}$ en fonction de $\vec{R}_G$, $\vec{P}$ et $\vec{\ell}$.

2. Énergie cinétique.

Rappeler comment l'énergie cinétique totale E_c dans le référentiel du laboratoire s'exprime en fonction d'une contribution correspondant au mouvement du centre de masse $E_c(G)$ et d'une contribution correspondant au mouvement relatif E_c^*. Exprimer $E_c(G)$ en fonction des données du problème.

3. Énergie potentielle d'interaction coulombienne.

Comme l'interaction nucléaire est de très courte portée, on peut admettre que tant que les deux noyaux ne se touchent pas (distance relative $r > R_1 + R_2$), seule l'interaction coulombienne entre les charges Z_1e et Z_2e de la cible et du projectile est à prendre en compte. On se limite à cette situation dans cette question.

a) Déterminer en tout point de l'espace le champ $\vec{E}$ et le potentiel électrostatique V créés par une sphère uniformément chargée de rayon R et de charge Q. Tracer V en fonction de la distance au centre de la sphère, pour $Q > 0$.

b) Déterminer l'énergie d'interaction électrostatique E_{el} entre les deux noyaux en fonction de leur distance relative r. On admettra qu'une distribution statique de charges à symétrie sphérique se comporte, tant pour le champ qu'elle crée à l'extérieur que pour la force totale qu'elle subit de la part d'un champ électrostatique externe, comme une charge ponctuelle égale à sa charge totale et localisée en son centre.

Deuxième partie
Collision et évolution du système composite

Dans cette partie on se propose de réaliser une étude énergétique de la collision pour déterminer l'évolution du système composite éventuellement formé. Pour simplifier on supposera dans toute la suite du problème que noyau cible et noyau projectile sont semblables ($A_1 = A_2 = A, Z_1 = Z_2 = Z, N_1 = N_2 = N$) et on omettra donc désormais les indices 1 et 2. On notera U_0 ($U_0 < 0$) l'énergie de liaison nucléaire *par particule* dans chacun des noyaux (l'énergie de liaison nucléaire vaut donc au total $U_b = 2AU_0$ pour l'ensemble des deux noyaux).

1. Énergie du système avant le contact.

On se place dans cette question aux instants précédant le contact des deux noyaux.

a) En utilisant les résultats de la première partie, donner l'expression de l'énergie totale E du système en précisant les différents termes qui la composent.

b) Quel est le mouvement du centre de masse du système ?

On se place désormais dans le référentiel barycentrique et on notera E^* l'énergie totale du système dans ce référentiel.

c) Quelle fraction de l'énergie E_{lab}, énergie cinétique initiale du noyau projectile dans le laboratoire, est « perdue » dans le mouvement du centre de masse ?

d) Qualifier la nature du mouvement du mobile équivalent dans le référentiel barycentrique.

e) Donner l'expression de E^* en fonction de r, de μ, de la vitesse radiale $\dot{r} = d\|\vec{r}\|/dt$, de $\ell = \|\vec{\ell}\|$ et de E_{el} et U_b.

2. Barrière coulombienne.

a) L'interaction nucléaire entre nucléons (neutrons et protons) est une interaction attractive, à très courte portée; elle est responsable de la liaison des nucléons dans un noyau. Pour un nucléon test supplémentaire, l'énergie potentielle d'interaction $V_{nuc}(r)$ avec un noyau de rayon R est bien représentée par un « puits de potentiel carré » (à symétrie sphérique) :

$$V_{nuc}(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{pour } r \leq R \\ 0 & \text{pour } r > R \end{cases}$$

où r est sa distance au centre du noyau.

Écrire l'énergie potentielle totale V_{tot}, nucléaire et électrostatique, de ce nucléon test supplémentaire (qui peut être un neutron *ou* un proton), en fonction de la distance r, pour un noyau contenant N neutrons et Z protons. Tracer V_{tot} dans le cas de ${}^{40}Ca$ ($N = Z = 20$, $V_0 = 50$ MeV).

b) Déduire des questions précédentes que par rapport au zéro d'énergie potentielle, existe entre deux noyaux (N, Z) une barrière d'énergie potentielle coulombienne U_{coul} dont on donnera la hauteur en fonction de Z et de la distance entre les centres des noyaux au moment du contact.

Faire l'application numérique pour une collision ${}^{40}Ca + {}^{40}Ca$.

c) À quelle condition, portant maintenant sur E_{lab}, ℓ et les paramètres du problème, les deux noyaux entrant en collision peuvent-ils vaincre la barrière coulombienne, c'est-à-dire entrer en contact (fusion des deux noyaux) ? Réécrire cette condition en fonction de E_{lab} et du paramètre d'impact b, distance entre la cible et l'asymptote de la trajectoire initiale du projectile.

d) Quelle est la nature de la trajectoire des noyaux lorsque la condition de la question **2.c)** n'est pas remplie ?

e) On considère une collision ${}^{40}Ca + {}^{40}Ca$. Quelle est l'énergie de faisceau minimale E_{lab}^{min} qui permet la fusion ? Faire l'application numérique.

On suppose $E_{lab} > E_{lab}^{min}$. Donner l'expression du moment cinétique maximal au delà duquel la fusion est impossible, en fonction de E_{lab} et E_{lab}^{min}. On prend $E_{lab}/A = 10$ MeV. La fusion est-elle possible ?

3. Compression.

On suppose désormais que E_{lab} et ℓ sont tels que les deux noyaux entrent en contact. Il y a alors (au moins transitoirement) fusion entre les deux noyaux, c'est à dire que les deux noyaux forment un seul et unique système composite. La physique est alors dominée par les interactions nucléaires. Le système n'est cependant pas à l'équilibre dans la mesure où les deux noyaux, chacun initialement de densité particulaire constante égale à ρ_0 ($\rho_0 = 3/(4\pi r_0^3)$), se recouvrent. Dans cette question on étudie *qualitativement* l'évolution temporelle de la densité du système, en admettant que la seule variable pertinente caractérisant le système composite est sa densité particulaire, ou nombre de nucléons par unité de volume ρ. Cette densité est supposée uniforme à l'intérieur du système, mais celui-ci se comporte comme un milieu élastique pouvant subir une évolution interne se traduisant par une compression ($\rho > \rho_0$) ou une expansion ($\rho < \rho_0$).

L'énergie interne du système *par particule* (d'origine nucléaire et électrostatique, mais hors énergie cinétique d'évolution interne et hors énergie de rotation globale) peut se paramétrer au voisinage de ρ_0 sous la forme

$$U(\rho) = U_0 + \frac{K}{18}\left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}\right)^2, \tag{2}$$

où ρ désigne la densité particulaire du système, U_0 l'énergie par particule correspondant à ρ_0 et K mesure la « compressibilité » de la matière nucléaire.

a) Rappeler l'expression de l'énergie de rotation E_{rot} du système composite au contact. Le moment cinétique relatif ℓ se conserve après contact des deux noyaux, et on fera l'approximation qu'il en est de même de E_{rot}.

b) On note $E_{c,int}$ l'énergie cinétique (hors rotation) associée à l'évolution interne après contact. Donner la relation existant entre $E_{c,int}$, $U(\rho)$, l'énergie totale avant collision E^* et E_{rot}. On suppose que toute l'énergie disponible est utilisée pour comprimer le système ; quelle est alors la densité maximale ρ_{max} qui peut être atteinte par le système ? Décrire sans calculs l'évolution ultérieure du système. Quelle est la densité minimale ρ_{min} ?

c) On considère une collision $^{40}Ca + ^{40}Ca$. Calculer ρ_{min} et ρ_{max} pour une collision frontale ($b = 0$) où $E_{lab}/A = 10$ MeV.

Troisième partie
Fragmentation du système composite formé

Dans la deuxième partie on s'est intéressé au début de la collision qui semble conduire le système à osciller indéfiniment autour de la position d'équilibre caractérisée par la densité ρ_0. La réalité est plus complexe : d'une part, ce mouvement oscillatoire est amorti, ce que l'on n'étudiera pas ici ; d'autre part, lorsque l'énergie disponible est suffisamment grande pour que le système initialement comprimé atteigne après oscillation des densités faibles, il y a possibilité de fragmentation (brisure en plusieurs noyaux) du système composite formé. On admet que le système reste en équilibre thermodynamique à tout instant de son évolution.

1. Étude de la pression.

On suppose d'abord que le système peut être considéré comme restant à température nulle.

a) Exprimer dans ce cas la pression comme dérivée partielle de l'énergie interne totale $2AU(\rho)$.

b) En déduire l'expression de la pression comme dérivée partielle de l'énergie interne *par particule* U, par rapport à la densité ρ.

c) Calculer la pression $p = p(\rho)$ associée à l'énergie interne donnée par l'expression (2).

d) À quelle pression correspond l'état d'équilibre défini par la densité ρ_0 ? Cet état d'équilibre est-il stable vis-à-vis d'oscillations de densité ? Quelle est la signification mécanique de la pression lorsque celle-ci devient négative ?

2. Une équation d'état réaliste à température nulle.

La paramétrisation (2) ne représente l'énergie interne nucléaire (à température nulle), qu'au voisinage du point d'équilibre caractérisé par les valeurs expérimentales ρ_0 de la densité (reliée à r_0) et U_0 de l'énergie par particule. On se propose dans cette question d'étudier certaines propriétés de l'équation d'état nucléaire à partir d'un modèle plus réaliste permettant d'accéder à une large plage de densités. Les calculs microscopiques d'équation d'état nucléaire montrent que l'énergie potentielle totale par particule $U_{pot}(\rho)$, qui résulte de toutes les interactions entre les constituants du système, s'exprime comme un polynôme en fonction de la densité

$$U_{pot}(\rho) = t_0\rho + t_3\rho^2, \tag{3}$$

où t_0 et t_3 sont deux paramètres phénoménologiques. Cette énergie potentielle, dite de Skyrme, doit être complétée par un terme cinétique. A température nulle, l'origine de ce terme tient à la nature quantique des constituants du système et dépend de la densité du système. Cette énergie cinétique par particule s'écrit

$$U_{cin}(\rho) = C\rho^{2/3}, \tag{4}$$

où la constante C est connue expérimentalement et vaut $C \simeq 75$ MeV.fm^2.

a) L'énergie interne totale par particule est $U = U_{cin} + U_{pot}$. En identifiant au voisinage de ρ_0 l'expression de U à celle donnée pour (2), exprimer les deux paramètres t_0 et t_3 en fonction de U_0, C et ρ_0. Faire l'application numérique, sachant que $U_0 \simeq -16$ MeV. Quels sont les signes respectifs de t_0 et t_3 ?

b) Donner l'expression de la pression $p(\rho)$ correspondant à ce modèle.

c) Trouver par un calcul numérique les deux valeurs approchées et non nulles de la densité ρ'_s et ρ_s pour lesquelles la dérivée de la pression par rapport à la densité est nulle (à température nulle). On notera ρ_s la plus grande de ces valeurs.

3. L'équation d'état à température non nulle.

On s'intéresse maintenant au cas d'une température non nulle. La température trouve son origine dans la transformation du mouvement relatif des deux noyaux entrant en collision en mouvement d'agitation thermique des nucléons. Des températures de l'ordre de $k_B T \sim 20$ MeV, où k_B est la constante de Boltzmann, bien que gigantesques à l'échelle humaine, sont concevables à l'échelle nucléaire. On va supposer pour simplifier que la composante quantique $U_{cin}(\rho)$ peut être négligée à ces températures. On admettra donc que la partie thermique de la pression est celle d'un simple gaz parfait, qui se substitue à la partie cinétique due à $U_{cin}(\rho)$ dans la pression calculée en **2.b)** ci-dessus.

a) Rappeler l'expression de la pression dans un gaz parfait en fonction de la densité particulaire ρ et de la température T. En déduire l'expression de la pression totale de la matière nucléaire $p = p(\rho, T)$ en fonction de la densité ρ et la température T.

b) Montrer qu'il existe une température T_c, telle que pour $T < T_c$ il existe deux valeurs $\rho'_s(T)$ et $\rho_s(T)$ ($\rho'_s < \rho_s$) de la densité pour lesquelles $(\partial p/\partial \rho)_T = 0$. Exprimer ces densités en fonction de t_0, t_3 et T.

c) Exprimer la température T_c en fonction de t_0, t_3. Faire l'application numérique (on donnera la valeur de $k_B T_c$ en MeV). Exprimer ρ_s pour $T = T_c$. Faire l'application numérique.

d) On se place dans le plan (ρ, T). A l'aide des résultats des questions précédentes montrer qu'il existe une région de ce plan, que l'on dessinera schématiquement, à l'intérieur de laquelle $(\partial p/\partial \rho)_T < 0$. Que se passe-t-il lorsque $T > T_c$?

4. Équation d'état et fragmentation.

On considère maintenant le comportement de la matière vis-à-vis de petites oscillations de densité autour de la position d'équilibre ρ_0, à température nulle pour l'instant. On note λ la masse volumique à l'équilibre et χ le coefficient de compressibilité :

$$\chi = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{T=0}$$

où V désigne le volume. On peut alors montrer que la pression vérifie, dans la limite des mouvements de petite amplitude, l'équation

$$\Delta p - \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0, \tag{5}$$

où Δ désigne le Laplacien, et où la vitesse du son c_s est définie par la relation $1/c_s^2 = \chi\lambda$.

a) Quelle est la nature de l'équation (**??**) ? Exprimer c_s en fonction de $(\partial p/\partial \rho)_{T=0}$.

b) Montrer qu'au voisinage de ρ_0, pour un système dont l'énergie interne est donnée par (2), c_s peut s'exprimer en fonction de K. Calculer c_s et comparer cette vitesse à celle de la lumière c.

c) On admet que la relation établie en **4.a)** entre c_s et $(\partial p/\partial \rho)_{T=0}$ est valable non seulement pour $\rho \simeq \rho_0$, mais aussi pour toute densité ρ et température T, en y substituant qualitativement $(\partial p/\partial \rho)_T$. On peut dès lors utiliser la forme à haute température de $p(\rho, T)$ obtenue en **3.a)** comme équation d'état. Que se passe-t-il qualitativement, pour un mouvement tel que celui de la question **3.** de la deuxième partie, si au cours de l'expansion du système, la densité ρ devient inférieure à $\rho_s(T)$? Commenter.

* *

*