

Polytechnique — 1999

Physique II — MP*

Quelques aspects de la physique des milieux granulaires

Première partie Hystérésis de frottement

I .1. – Pour $\theta = 0$, la réaction normale est égale à $N = P$. Si la brique s'est déplacée de x , la force tangentielle qu'elle subit de la part du ressort est $F = -kx$. Elle restera immobile tant que $|F| < \mu_s P$, donc pour

$$\underline{|x_{\theta=0}| < \frac{\mu_s}{k} P.}$$

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, la réaction normale est nulle et la brique reste fixe si $P - kx = 0$, soit

$$\underline{x_{\theta=\pi/2} = \frac{P}{k}.}$$

I .2. – Glissement et équilibre

I .2.a. – Si l'inclinaison est donnée par θ , la réaction normale est $N = P \cos \theta$ et la réaction tangentielle lorsque la brique est immobile (i.e $\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$), $T = kx - P \sin \theta$ (mesuré algébriquement le long de Ox).

Initialement, la position est $x = 0$ et la condition d'équilibre s'écrit $P \sin \theta < \mu_s P \cos \theta$. Le glissement apparaîtra donc pour

$$\underline{\theta_1^+ = \arctan \mu_s.}$$

L'angle ayant cette valeur, la position d'équilibre sera

$$\underline{x_1^+ = \frac{P}{k} \sin \theta_1^+ .}$$

En effet, lorsque le mobile glisse, $T = 0$ puisque $\mu_d = 0$; il s'arrêtera sous l'effet du frottement fluide au point tel que la force tangentielle soit nulle.

I .2.b. – Lorsque $x = x_1^+ = \text{cste}$ et que θ augmente au-delà de θ_1^+ , T devient négatif et la condition de non-glissement devient $P \sin \theta - kx_1^+ < \mu_s P \cos \theta$, soit $\sin \theta_1^+ > \sin \theta - \mu_s \cos \theta$. Le glissement débutera lorsque l'égalité sera vérifiée, donc à l'angle θ_2^+ tel que

$$\underline{\sin \theta_1^+ = \sin \theta_2^+ - \mu_s \cos \theta_2^+}.$$

En notant que $\tan \theta_1^+ = \mu_s$, on aura $\sin \theta_1^+ \cos \theta_1^+ = \cos \theta_1^+ \sin \theta_2^+ - \sin \theta_1^+ \cos \theta_2^+$, soit encore

$$\underline{\frac{1}{2} \sin 2\theta_1^+ = \sin(\theta_2^+ - \theta_1^+)}.$$

I .2.c. – Lorsque l'angle de glissement est θ_i^+ , la brique s'arrête en $x = x_i^+$ tel que $kx_i^+ = P \sin \theta_i^+$. L'angle augmente alors et le glissement réapparaît lorsque

$$\underline{\sin \theta_i^+ = \sin \theta_{i+1}^+ - \mu_s \cos \theta_{i+1}^+}.$$

Puisque $\cos \theta_i^+ > 0$, la suite des $\sin \theta_i^+$ est croissante et bornée par 1. Elle admet donc une limite qui vérifie $\sin \theta_\infty^+ = \sin \theta_\infty^+ - \mu_s \cos \theta_\infty^+$, soit $\theta_\infty^+ = \frac{\pi}{2}$. Les différences successives $\theta_{i+1}^+ - \theta_i^+$ tendent donc vers 0.

I .3. – Lorsque les angles décroissent, considérons l'instant où $\theta = \theta_i^-$. Le glissement apparaît et le mobile s'arrête en $x = x_i^-$ tel que $kx_i^- = P \sin \theta_i^-$. L'angle décroît encore et on a maintenant $T = -kx_i^- + P \sin \theta < 0$; la condition de non glissement devient $P \sin \theta - kx_i^- < \mu_s P \cos \theta$. Le glissement réapparaît donc pour θ_{i+1}^- tel que

$$\underline{\sin \theta_i^+ = \sin \theta_{i+1}^+ + \mu_s \cos \theta_{i+1}^+}.$$

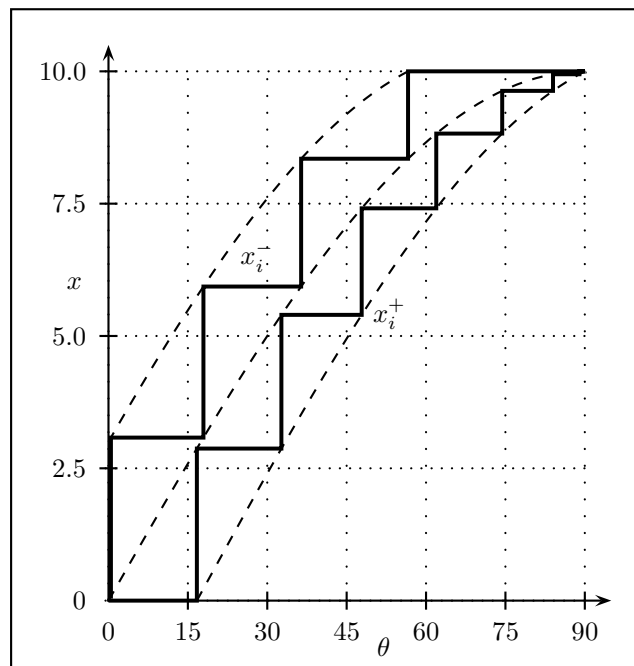


fig1 : déplacement de la brique (mesuré en cm) en fonction de l'inclinaison en degrés.

I .4. – On a donc $x_i^+ = \frac{P}{k} \sin \theta_i^+ = \frac{P}{k} (\sin \theta_{i+1}^+ - \mu_s \cos \theta_{i+1}^+)$, donc la fonction $x^+(\theta)$ est représentée par un graphe en escalier compris entre les courbes $\frac{P}{k} \sin \theta$ et $\frac{P}{k} (\sin \theta -$

$\mu_s \cos \theta$). De même $x_i^- = \frac{P}{k} \sin \theta_i^- = \frac{P}{k} (\sin \theta_{i+1}^- + \mu_s \cos \theta_{i+1}^-)$; la fonction $x^-(\theta)$ est représentée par un graphe en escalier compris entre les courbes $\frac{P}{k} \sin \theta$ et $\frac{P}{k} (\sin \theta + \mu_s \cos \theta)$.

La position de la brique dépend donc du sens de variation de l'inclinaison. L'état du système dépend donc de son histoire : on a hystérésis. Si on se limitait à un excursion de l'angle entre $\theta_1 > 0$ et $\theta_2 < \pi/2$, les positions x_i^+ et x_i^- dépendrait du nombre d'aller-retours effectués depuis le début de l'expérience. Pour une excursion $[\theta_1 \leq 0, \pi/2]$, seul le premier cycle diffère des suivants et le système est périodique à partir du cycle n°2.

Deuxième partie Principe de dilatace de Reynolds

II .1.a. – L'aire des portions de disque situées en-dehors du losange est $S_1 = 2 \times (\pi - \theta)R^2 + 2 \times (\frac{\pi}{2} + \theta)R^2 = 3\pi R^2$; c'est une constante. L'aire du losange est $S_2 = L_v L_h / 2$ donc

$$S_t = 3\pi R^2 + \frac{1}{2} L_v L_h.$$

II .1.b. – On a $2R \cos \theta = L_h / 2$ et $2R \sin \theta = L_v / 2$, donc $L_v = 4R \sqrt{1 - (\frac{L_h}{4R})^2}$

et

$$\Delta S_t = 2 L_h R \sqrt{1 - \left(\frac{L_h}{4R}\right)^2}.$$

II .1.c. – Lorsque les deux boules de l'axe horizontal sont accolées, L_h est minimum et vaut $2R$. Lorsque les deux boules verticales se touchent, L_h est maximal; l'angle θ est alors tel que $\sin \theta = \frac{1}{2}$, soit $\theta = \frac{\pi}{6}$ et $L_h = 4R \cos \theta = 2R\sqrt{3}$. Il vient donc

$$L_h \in [2R, 2R\sqrt{3}].$$

Posons $x = L_h / 2R$; alors $\frac{\Delta S_t}{4R^2} = x \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$, dont le graphe est indiqué ci-contre, x variant de 1 à $\sqrt{3}$.

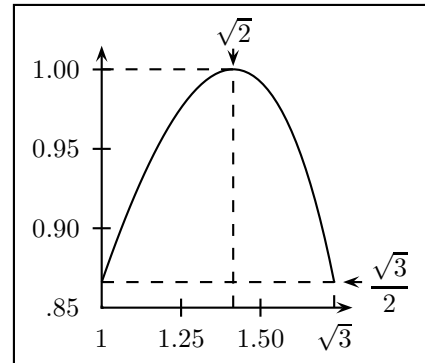


fig.2 : $\Delta S_t / 4R^2$ en fonction de $L_h / 2R$.

II .1.d. – En partant de $L_h = 2R$, le système commence par se dilater si on applique les forces $\pm f_v$; on est dans un régime de Reynolds. La dilatation passe par un maximum puis retrouve un régime solide où il se comprime sous l'effet de la surpression.

La valeur de x limitant les deux régimes est tel que ΔS_t^2 est maximum. Ceci se produit pour $x^2 - x^4/4$ maximum, donc pour $x(2 - x^2) = 0$, soit $L_h = 2\sqrt{2}R$.

II .2.a. – La réaction d'un disque sur son voisin est portée par la ligne qui joint leurs centres. Soit N la réaction d'un disque de l'axe horizontal sur le disque supérieur. L'équilibre de ce dernier s'écrira $2N \sin \theta = f_v$. L'action des deux disques de l'axe vertical sur le disque de droite est alors dirigée vers la paroi et de module égal à $2N \cos \theta$; l'équilibre de ce disque exige donc l'existence d'une force $-f_h$ exercée par la paroi, avec

$$f_h = K f_v \quad \text{ou} \quad K = \cot \theta.$$

II .2.b. – Pour $\theta = \pi/3$ (i.e. $L_h = 2R$), $K = 0,577$.

II .3.a. – Les deux disques de l'axe vertical ne sont soumis qu'aux actions de contact avec les deux autres. Les actions des deux disques de l'axe horizontal sur le disque supérieur (ou inférieur) sont de résultante nulle et elles sont opposées ; comme elles sont en outre symétriques par rapport à l'axe vertical, on en déduit qu'elles sont portées par l'axe horizontal. Pour assurer l'équilibre du disque de droite, il faut que la somme des actions exercées par les deux disques de l'axe vertical soit égale à $-\mathbf{f}_h$; mais comme ces actions sont égales (symétrie par rapport à l'axe horizontal qui porte l'action de contact), elles valent toutes deux $-\mathbf{f}_h/2$.

Le système est en équilibre si cette force (portée par l'axe horizontal) se trouve à l'intérieur du cône de frottement, donc si $\tan \theta < \mu_s$.

II .3.b. – Avec $\mu_s = 0,9$, cela impose $\theta < 42^\circ$.

Troisième partie

Problème du silo : modèle de Janssen-Rayleigh

III .1. – Étude statique

III .1.a. – Une tranche de granulat située entre z et $z + dz$ est soumise le long de l'axe vertical, à la résultante de contrainte verticale $\frac{\pi D^2}{4} (+p_v(z) - p_v(z + dz)) = \frac{\pi D^2}{4} \frac{dp_v}{dz} dz$, à son poids $-\frac{\pi D^2}{4} \rho g dz$ et à la contrainte de frottements sur les parois ; celle-ci s'écrit $\mu_s p_h dS$, où dS est la surface latérale de la tranche, soit $\pi D K \mu_s p_v dz$. L'équilibre de ces forces s'écrit alors

$$\frac{dp_v}{dz} = -\rho g + \frac{4K\mu_s}{D} p_v.$$

III .1.b. – Notons $\lambda = \frac{D}{4K\mu_s}$.

La solution générale de l'équation homogène est $Ae^{z/\lambda}$, une solution particulière étant $\rho g \lambda$, donc la solution générale sera $p_v = Ae^{z/\lambda} + \rho g \lambda$. En $z = H$, on doit avoir $p_v = 0$, donc

$$p_v(z) = \rho g \lambda \left(1 - e^{(z-H)/\lambda} \right).$$

A.N. : $\lambda = 4,17$ m.

III .1.c. – Le graphe représentatif de $p_v/\rho g \lambda$ en fonction de x/λ est indiqué ci-dessous, pour deux valeurs de H/λ .

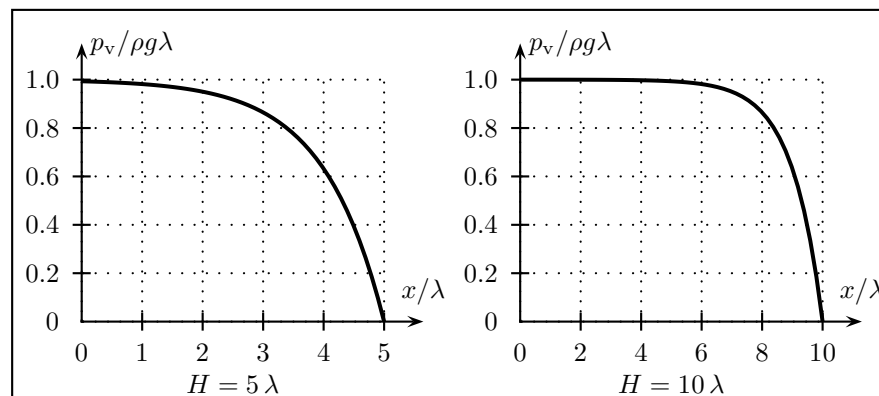


fig.3

Si on se trouve près de la surface du granulat, on peut écrire $z = H - h$, où la profondeur h est prise petite devant λ . Alors $p_v \simeq \rho gh$, et la contrainte verticale suit la loi de Pascal : on se trouve en régime hydrostatique.

Si, au contraire, on se trouve en $x \ll \lambda \ll H$, alors $p_v \simeq \rho g \lambda$; la contrainte ne varie presque plus avec z : on est en régime saturé.

En fait, λ représente en quelque sorte la hauteur caractéristique nécessaire pour que l'empilement "s'accroche" à la paroi du récipient.

III .1.d. – Le poids apparent est la force qui s'exerce sur le fond, en $z = 0$. Cette force est $P = \frac{\pi}{4} D^2 p_v(z = 0)$, et, si $H \gg \lambda$,

$$\frac{P}{mg} = \frac{\lambda}{H}.$$

Le poids apparent est beaucoup plus faible que le poids réel.

III .2.a. – La tranche décolle lorsque la force exercée par les couches supérieures du granulat n'est plus suffisante pour compenser l'inertie de la tranche étudiée (qui devrait être entraînée à l'accélération $-\Gamma g$). Or les couches se trouvant au-dessus de cette subissent un poids apparent moindre puisque dû à une quantité moindre de granulat ; ce poids apparent est d'autant moins apte à contrer l'inertie de ces couches et toutes les couches situées au-dessus de la tranche qui décolle décolleront aussi.

III .2.b. – À la limite du décollement, la tranche n'est plus en contact avec les couches supérieures de granulat qui ont décollé, et son contact est très ténu avec les parties inférieures. Les contraintes verticales qu'elle subit sont donc infiniment faibles, et, à la limite, nulle.

Mais le décollement n'étant pas encore effectif, l'accélération de la tranche est toujours $-\Gamma g \mathbf{e}_z$. Le bilan des forces verticales s'écrit donc $dF_p - dm g = -dm \Gamma g$, soit

$$\underline{dF_p = -dm(\Gamma - 1)g}.$$

III .2.c. – On a vu au II .3.b. que l'élimination de la contrainte verticale ne modifiait pas la contrainte horizontale si le matériau est compacté. Ainsi, lors du décollement limite de la couche, la contrainte horizontale qu'elle suit de la part de la paroi peut être considérée comme constante alors même que les contraintes verticales disparaissent.

La contrainte horizontale étant $p_h = K \rho g \lambda (1 - e^{(z-H)/\lambda})$, on aura $|dF_p| = \pi D dz \mu_s p_h$, et, sur la couche à la limite du décollement, le résultat précédent permet alors d'écrire $\frac{\pi}{4} D^2 \rho (\Gamma - 1) g dz = \pi D dz \mu_s p_h$, soit

$$D(\Gamma - 1) = 4\mu_s K \lambda (1 - e^{(z-H)/\lambda}) = D(1 - e^{(z-H)/\lambda}).$$

La couche limite étant située en $z = H_t$, on aura

$$\underline{H_t = H + \lambda \ln(2 - \Gamma)}.$$

III .2.d. – Une partie de l'empilement décolle si $H_t < H$, donc si $\Gamma > \underline{\Gamma_{\min} = 1}$.

Il décollera dans son ensemble si $H_t < 0$, donc $\Gamma > \underline{\Gamma_{\text{dec}} = 2 - e^{-H/\lambda}}$. Lorsque $H/\lambda \rightarrow \infty$, $\Gamma_{\text{dec}} \rightarrow 2$.

III .2.e. – Le système permet d'avoir une évolution continue de Γg entre $A_m \omega^2$ et $-A_m \omega^2$. Cette accélération est maximale aux sommet de la trajectoire ; c'est donc une observation de la base du cylindre en $z = A_m$ qui permettra de mettre le décollement en évidence.

Pour obtenir une accélération réduite au moins égale à 2, il faut $A_m > 5,5 \text{ cm}$.

III .3.a. – Si une tranche se désolidarise de l’empilement, elle ne sera plus soumise qu’à son poids $-\frac{\pi}{4}D^2\rho g dz$ et à la force de friction de la paroi, dirigée vers le haut (qui s’oppose au glissement de la tranche vers le bas) et de module $|dF_p| = \pi D dz K \mu_d p_h$.

La contrainte p_h étant toujours donnée par III .1.b., on aura, pour l’accélération de la tranche

$$-dm\Gamma g = -dmg + dm \frac{4K}{D} \mu_d \lambda (1 - e^{(z-H)/\lambda}) = -dm g e^{(z-H)/\lambda}$$

si $\mu_s = \mu_d$, et

$$\Gamma = e^{(z-H)/\lambda}.$$

L’accélération des tranches décollées croît donc avec z ; il en résulte que les couches supérieures rattrapent les couches inférieures, jusqu’à la couche se trouvant à la limite du décollement. Par conséquent, le système tend à rester compact.

III .3.b. – La résultante des forces de friction s’écrit

$$\begin{aligned} F_p &= \int_0^H \pi D \mu_d K \rho g \lambda (1 - e^{(z-H)/\lambda}) dz = \pi D \mu_s K \rho g \lambda (H - \lambda(1 - e^{-H/\lambda})) \\ &= \frac{\pi D^2}{4} \rho g H \left(1 - \frac{\lambda}{H}(1 - e^{-H/\lambda})\right). \end{aligned}$$

En introduisant la masse totale de l’empilement $M = \frac{\pi}{4}D^2\rho H$, on a pour équation du mouvement

$$-M\Gamma_{ch}g = -Mg + Mg \left(1 - \frac{\lambda}{H}(1 - e^{-H/\lambda})\right),$$

soit

$$\Gamma_{ch} = \frac{\lambda}{H}(1 - e^{-H/\lambda}).$$

En notant $x = \frac{H}{\lambda}$, on a $\Gamma_{ch} = \frac{1 - e^{-x}}{x}$. Dès lors $\frac{d\Gamma_{ch}}{dx} = \frac{e^{-x}}{x} - \frac{1 - e^{-x}}{x^2} = \frac{(1+x)e^{-x} - 1}{x^2}$.

Soit alors $f(x) = e^{-x} - (1+x)$ sur $[0, +\infty[$; on a $f(0) = 0$ et $f'(x) = e^{-x} - 1 > 0$, donc $f(x) \geq 0$ sur $[0, +\infty[$. Par conséquent, Γ_{ch} est une fonction décroissante de H .

On pourra remarquer que $\Gamma_{ch} = \frac{p_v(z=0)}{\rho g H} = \frac{P_{apparent}}{P_{réel}}$, c’est-à-dire que la chute s’effectue sous l’effet du poids apparent.

Pour $H \ll \lambda$, $\Gamma_{ch} \simeq 1$; la hauteur n’est pas suffisante pour que “l’accrochage” sur la paroi soit significatif et le système tombe sous l’effet de son poids, les forces de friction étant négligeables. Pour $H \gg \lambda$, $\Gamma_{ch} \simeq \lambda/H$; “l’accrochage” des couches inférieures est réalisé et elles se font simplement “pousser” par une hauteur λ d’empilement non “accroché” sans que leur poids ne participe au mouvement.

III .3.c. – Les deux empilements fils ont alors chacun une accélération $\Gamma_{ch}(H_f)$ (partie inférieure) et $\Gamma_{ch}(H - H_f)$ (partie supérieure) et des vitesses initiales comparables. La fracture perdurera si l’accélération de la partie basse est supérieure à celle de la partie haute. L’accélération décroissant avec H , il faudra $H - H_f > H_f$, soit

$$\underline{H_f < \frac{H}{2}}.$$