Tout commentaire, remarque, accord, désaccord, appréciation, critique, ... concernant ce document ou tout autre document de ce site est le bienvenu.
Adressez-le moi à paulbou@wanadoo.net.ma.

Polytechnique — 2001
Physique I — MP

Accélérateurs linéaires

I. – Accélérateurs électrostatiques

I.1. – La force électrostatique étant conservative, l'énergie mécanique de la charge se conserve au cours de son mouvement et $\frac{1}{2}mv_A^2 + eV_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + eV_B$, d'où

$$\underline{v_B = \sqrt{v_A^2 + \frac{2eU_{AB}}{m}}}\,.$$

A.N. : $v_B = 10^6$ m.s^{-1}.

I.2. – Le résultat ne dépend que de la différence de potentiel entre le point d'entrée et le point de sortie de la charge dans le condensateur et non de sa géométrie.

I.3. – Lorsque la diode est passante, $U = U_c$; dès qu'elle est bloquée le courant parcourant le circuit est nul et U_c est constante.

I.3.a. – Sur la première quadrature, $U(t)$ croît de 0 à U_0 ; la tension aux bornes de la diode est légèrement positive (U_c se charge avec un très léger retard sur $U(t)$) et le condensateur se charge en suivant pratiquement les variations de $U(t)$. Dès que $U(t)$ commence à décroître, elle devient inférieure à U_c ; la diode se bloque et U_c reste constante, le condensateur ne pouvant plus se décharger. On a donc

$$\underline{U(t) = \begin{cases} U_0 \sin \omega t & \text{si } 0 < t < T/4, \\ U_0 & \text{si } t > T/4. \end{cases}}$$

I.3.b. – Puisque $-U_0 < U(t) < U_0$, la tension maximale aux bornes de la diode sera $\underline{U_{\max} = 2U_0}$.

I.4. – La masse du système est placée en N.

Si D' est passante, alors $V_M = 0$ et deux cas se produisent :
- si D est passante $V_B = 0$ et $U_c = 0$; le condensateur C est déchargé et $i = 0$;
- si D est bloquée $V_B < 0$ et $U_c < 0$; le condensateur C est chargé avec $Q > 0$ et sa charge reste constante puisque le courant i traversant la diode D est nul.
  De ceci on tire que si D' est passante, $i = 0$.

Si D' est bloquée, alors $i+i'=0$ et $V_M<0$;

- si D est passante $V_B<V_M$ et $i=-i'>0$; le condensateur C se charge ;
- si D est bloquée $0>V_B>V_M$ et $U_c<0$; le condensateur est chargé avec $Q>0$ et sa charge reste constante puisque le courant i traversant la diode D est nul. Alors $i'=0$ aussi.

I.4.a. – On a $\underline{i=\dfrac{dQ}{dt}}$ et $\underline{i'=\dfrac{dQ'}{dt}}$.

I.4.b. – Le courant i traversant D ne peut être que positif ; Q ne peut donc que croître. Puisque, initialement, $Q=0$, on aura toujours $Q(t)\geqslant 0$ si $t\geqslant 0$.

I.4.c. – Si D est passante, $V_M=V_B=U_c=-Q/C\leqslant 0$; D' est alors bloquée.
On a aussi $U(t)=V_A=V_A-V_M+V_B$, donc

$$\underline{U(t)=\frac{Q'}{C'}-\frac{Q}{C}}.$$

I.4.d. – Supposons que $U(t)$ décroisse. Si D' est passante, alors on sait que $i=0$ et que $V_M=0$. Puisque V_A décroît, il s'ensuit que $Q'/C'=V_A-V_M=V_A$ décroît aussi ; par conséquent $i'<0$. La diode D' serait alors traversée en inverse par un courant non nul, ce qui est impossible.

Ainsi, D' est bloquée dès que $U(t)$ décroît.

Alors $i+i'=0$, donc $\underline{Q(t)+Q'(t)=\text{cste}}$.

I.4.e. – Supposons que $U(t)$ croisse. Si D est passante, alors, selon le I.4.c, D' est bloquée et

$$\frac{dU}{dt}=\frac{i'}{C'}-\frac{i}{C}>0.$$

Mais si D' est bloquée, $i+i'=0$, donc

$$\frac{dU}{dt}=-\left(\frac{1}{C'}+\frac{1}{C}\right)i>0.$$

On aurait donc $i<0$, ce qui est impossible. D est donc bloquée dès que $U(t)$ croît.

Alors $i=0$ et $Q(t)$ reste constante.

I.5. – **A**u cours de la première quadrature, U croît de 0 à U_0. D est donc bloquée et Q reste nulle. Que D' soit bloquée ou passante, on aura $V_M\leqslant 0$ et V_A croissante positive ; il s'ensuit que Q' est croissante et positive. Il faut donc $i'>0$; puisque $i=0$, D' est forcément passante.

On peut alors écrire $V_M=0$ donc $Q'=C'U(t)$. Q' croît donc, au cours de cette quadrature, de 0 à $C'U_0$.

Ensuite U décroît de U_0 à $-U_0$ et D' est bloquée. On a $V_M=V_A-(V_A-V_M)=U-Q'/C'$ et, aux bornes de D, $U_D=V_B-V_M=-Q/C+Q'/C'-U$. D se bloque si cette quantité devient négative. Au cours de cette demi-période, on a aussi $Q+Q'=C'U_0=\text{cste}$.

Si D reste bloquée un moment, on aura $Q=0$ et $Q'/C'=U_0>U(t)$ car U décroît. On en tire que $U_D>0$ et que D est passante.

On peut alors appliquer le I.4.c et $U=Q'/C'-Q/C$; alors $V_M=-Q/C<0$ et $U_D=0$. Lorsque $U=-U_0$, on a à la fois $-U_0=Q'/C'-Q/C$ et $Q/C'+Q'/C'=U_0$, donc, en notant Q_1 et Q_1' les charges des condensateurs à cet instant,

$$\left(\frac{1}{C'}+\frac{1}{C}\right)Q_1=2U_0\ \Rightarrow\ Q_1=\frac{2CC'U_0}{C+C'}\quad\text{et}\quad Q_1'=\frac{C'-C}{C'+C}C'U_0.$$

Puis U se remet à croître. D se bloque, et Q reste égale à Q_1. Initialement quand $U=-U_0$, on a encore $V_M=-Q/C=-Q_1/C<0$ donc D' est bloquée. Cependant elle ne peut rester bloquée tout le

07/06/2001
Paul BOURDET

temps. En effet, si cela était, on aurait $Q' = \text{cste} = Q'_1$, de sorte que $V_M = U - \dfrac{Q'}{C'} = U(t) + \dfrac{C - C'}{C + C'}\, U_0$; lorsque U atteint son maximum U_0, $V_M = 2CU_0/(C + C') > 0$, donc D' serait déjà passante.

On peut donc affirmer que D' devient passante avant que U ne prenne sa valeur maximale. Il en résulte que lorsque $U = U_0$, $Q'_0 = C'U_0$.

Au cours de la phase suivante de décroissance, D' est bloquée, et U_D vaut initialement $-Q_1/C + Q'_0/C' - U_0 = -Q_1/C < 0$; D est aussi bloquée. Si elle restait bloquée jusqu'à ce que $U = -U_0$, Q et Q' seraient constantes, et on aurait, à la fin de cette phase

$$U_D = -Q_1/C + Q'_0/C' + U_0 = 2U_0 - \frac{2C'U_0}{C + C'} = \frac{2CU_0}{C + C'} > 0$$

et D serait passante. On peut donc affirmer que D devient passante avant que U n'atteigne son minimum.

I.5.a. – Nous supposerons donc que, partant d'un instant initial t_0 où U est minimale pour la $n^{\text{ème}}$ fois, on a $Q = Q_n$ et $Q' = Q'_n$ et que, au cours de la croissance de U et avant que $U = +U_0$, D' devienne passante. D reste, elle, bloquée, et Q garde sa valeur Q_n.

À partir du moment où D' est passante, on a $Q' = C'U(t)$. Lorsque U devient maximale, Q' est aussi maximale et $Q'_{\max} = Q'_0 = C'U_0$.

I.5.b. – Au cours de la phase suivante de décroissance, $Q + Q' = \text{cste} = Q_n + C'U_0$ car D' est bloquée. Nous supposons que D devient passante avant que $U = -U_0$.

Alors, lorsque $U = -U_0$, on a $Q = Q_{n+1}$ et $Q' = Q'_{n+1}$ avec

$$-U_0 = \frac{Q'_{n+1}}{C'} - \frac{Q_{n+1}}{C} = \frac{Q_n + C'U_0 - Q_{n+1}}{C'} - \frac{Q_{n+1}}{C}\,,$$

et

$$\underline{\left(1 + \frac{C'}{C}\right) Q_{n+1} = Q_n + 2C'U_0.}$$

Alors $Q'_{n+1} = Q_n + C'U_0 - Q_{n+1}$, soit

$$\left(1 + \frac{C'}{C}\right) Q'_{n+1} = \left(1 + \frac{C'}{C}\right)(Q_n + C'U_0) - Q_n - 2C'U_0 = \frac{C'}{C}\, Q_n + \left(\frac{C'}{C} - 1\right) C'U_0$$

d'où

$$Q'_{n+1} = \frac{C'}{C + C'}\, Q_n + \frac{C' - C}{C + C'}\, C'U_0.$$

La condition à laquelle D devient passante avant que $U = -U_0$ s'écrit, d'après ce qui précède,

$$-Q_n/C + Q'_0/C' + U_0 = -Q_n/C + 2U_0 > 0 \;\Rightarrow\; Q_n < 2CU_0.$$

Montrons alors que le cycle se poursuit. Lorsque U se remet à croître jusqu'à U_0, D' est initialement bloquée, mais puisque

$$+U_0 - \frac{Q'_{n+1}}{C'} = U_0 - \frac{1}{C + C'}\, Q_n - \frac{C' - C}{C + C'}\, U_0 = \frac{2CU_0 - Q_n}{C + C'}\, U_0 > 0,$$

on peut affirmer que D' est passante avant que U passe par son maximum.

D'autre part

$$Q_{n+1} = \frac{C}{C + C'}(Q_n + 2C'U_0) < \frac{C}{C + C'}(2CU_0 + 2C'U_0) = 2CU_0,$$

donc D devient passante avant que U n'atteigne son $(n+2)^{\text{ème}}$ maximum.

Le cycle peut donc se poursuivre ainsi et la relation liant Q_n à Q_{n+1} reste toujours valable.

I.5.c. – Si la suite Q_n converge, sa limite Q_∞ est telle que

$$\left(1+\frac{C'}{C}\right)Q_\infty = Q_\infty + 2C'U_0 \;\Rightarrow\; Q_\infty = 2CU_0.$$

On a vu que la condition à laquelle D devient passante est $Q_n < 2CU_0$ et on a montré que si Q_n vérifie cette condition, Q_{n+1} la vérifie aussi. On a aussi

$$Q_{n+1} - Q_n = Q_{n+1} - \left(1+\frac{C'}{C}\right)Q_{n+1} + 2C'U_0 = \frac{C'}{C}(2CU_0 - Q_{n+1}) > 0.$$

La suite $\{Q_n\}$ est donc croissante et majorée ; par conséquent elle converge et sa limite est

$$\underline{Q_\infty = 2CU_0}.$$

Alors

$$Q'_\infty = \frac{C'}{C+C'}Q_\infty + \frac{C'-C}{C+C'}C'U_0 = \frac{2C}{C+C'}C'U_0 + \frac{C'-C}{C+C'}C'U_0,$$

soit

$$\underline{Q'_\infty = C'U_0}.$$

Les tensions aux bornes des condensateurs C et C' sont donc respectivement $2U_0$ et U_0 (en valeur absolue).

I.5.d. – La tension aux bornes de D' est $V_M = U - Q'_\infty/C' = U - U_0$, donc cette tension varie entre 0 et $-2U_0$.

La tension aux bornes de D est $-Q_\infty/C + Q'_\infty/C' - U = -(U_0 + U)$ et elle varie aussi entre 0 et $-2U_0$.

On a donc conservé la même tension maximale aux bornes des diodes tout en doublant la valeur de la tension de sortie. En rajoutant d'autres étages (Diode+Condensateur), on peut obtenir des tensions nU_0 ($n \in \mathbb{N}$), chacune des diodes étant polarisée sous des tensions inférieures à $2U_0$.

II. – Accélération par une tension alternative

II.1. – **L**es tubes conducteurs constituent des cages de Faraday dans le quel le champ est pratiquement nul. L'accélération y peut être négligée.

II.2. – **L**orsque la particule passe d'un tube $2n$ à un tube $2n+1$, elle passe du potentiel 0 (terre) au potentiel $U(t_{2n+1})$. Lorsqu'elle passe au tube suivant, elle quitte potentiel $U(t_{2n+2})$ pour rejoindre le potentiel 0. Si l'on veut que chaque passage s'accompagne d'une accélération, il faut que le champ s'inverse à chaque fois que la particule quitte un tube. Il faudra donc avoir

$$t_{n+1} - t_n = \frac{\pi}{\omega} = \frac{T}{2}.$$

II.3. – **L**es tubes pairs sont reliés à la terre et les tubes impairs sont au potentiel $U(t)$.

II.3.a. – Lors du passage d'un tube pair à un tube impair,

$$\delta V_{2n} = U(t_{2n+1})$$

alors que dans le cas contraire

$$\delta V_{2n+1} = -U(t'_{2n+1}).$$

II.3.b. – Puisque $t_{n+1} - t'_n \ll T$, on peut considérer que $U(t'_n) \simeq U_(t_{n+1})$. Dès lors $\delta V_{2n} = U(t_{2n+1})$ et $\delta V_{2n+1} = -U(t_{2n+2})$, soit

$$\delta V_n = (-1)^n U(t_{n+1}).$$

Maintenant, lorsque la condition de synchronisme est réalisée, $U(t_{n+1}) = U(t_n + T/2) = -U(t_n) = (-1)^{n+1}U(t_0)$ et

$$\delta V_n = -U(t_0) = -U_0 \sin \omega t_0 = -U_0 \sin \phi_0.$$

Si $0 < \phi_0 < \pi$, $\delta V_n < 0$ et les ions seront accélérés à chaque passage d'un tube à l'autre.

II.3.c. – L'ion quitte le tube n avec la vitesse qu'il avait lorsqu'il y est entré, soit $v(t'_n) = v_n$. Durant le passage au tube suivant il est accéléré par la différence de potentiel δV_n et la conservation de l'énergie permet d'écrire

$$v_{n+1}^2 = v_n^2 - \frac{2e}{m}\,\delta V_n.$$

On en tire

$$v_n^2 = v_0^2 + \frac{2ne}{m}\,U_0 \sin \phi_0.$$

Puisque $t_{n+1} - t'_n \ll T/2$, on pourra écrire la condition de synchronisme $t'_n - t_n \simeq T/2$. Mais cet intervalle de temps est égal à L_n/v_n, donc

$$L_n = \frac{\pi}{\omega}\sqrt{v_0^2 + \frac{2ne}{m}\,U_0 \sin \phi_0}.$$

II.4. – *Application numérique*

II.4.a. – On a $L_0 = \pi v_0/\omega = 5{,}1$ cm.

II.4.b. – L'énergie cinétique aura au moins doublé si $\dfrac{2ne}{m}U_0 \sin \phi_0 > v_0^2$, soit $n > 8{,}7$. Ceci se produira donc à l'entrée du 10e tube (qui porte le numéro 9).

À ce moment le tube est $\sqrt{2}$ fois plus long que le premier. On peut estimer la longueur du dispositif par $L = 9L_0(1+a)$, où $0 < a < 0{,}414$. En prenant $a = 0{,}2$, on trouve $L = 55$ cm.

II.4.c. – L'accélération de l'ion de masse m' sera synchrone si il met, pour traverser un tube, le même temps que l'ion de masse m, donc si $v'_n = v_n$. Ceci impose que $\sin\alpha_0/m' = \sin\phi_0/m$, soit

$$m' = \frac{\sin\alpha_0}{\sin\phi_0}\,m < \frac{m}{\sin \phi 0}.$$

On ne pourra accélérer de façon synchrone que des ions de nombres de masses inférieurs à 158.

II.5. – **S**i une particule rentre dans le tube avec un retard $\delta t = \tau_0 - t_0 > 0$, elle en ressort aussi en retard. Elle ne subit par conséquent pas la même accélération lorsqu'elle passe au tube 1. Elle ne pourra rattraper son retard que si cette accélération est supérieure à celle que subit la particule synchrone, donc si elle est soumise à une différence de potentiel plus grande.

Inversement, si une particule rentre en avance ($\delta t = \tau'_0 - t_0 < 0$), il faudra qu'elle soit moins accélérée lors du passage au tube 1 pour qu'elle puisse se laisser rejoindre par la particule synchrone.

Or la différence de potentiel ressentie par la particule en retard sera $U_0 \sin \omega\tau_0$ et celle que ressent la particule en avance est $U_0 \sin \omega\tau'_0$. Il faudra donc $\sin\omega\tau'_0 < \sin\omega t_0 < \sin\omega\tau_0$; $U(t)$ devra être croissante au voisinage de t_0. Ceci impose

$$\phi_0 \in [0,_p i/2].$$