

CONCOURS D'ADMISSION 2002

DEUXIÈME COMPOSITION DE PHYSIQUE

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices est autorisée pour cette épreuve.

Premier problème

L'objet du problème est d'étudier certains aspects du mouvement de trois corps en interaction gravitationnelle. On désignera par \mathcal{G} la constante de gravitation universelle.

I

Deux masses ponctuelles m_1 et m_2 en interaction gravitationnelle forment un système isolé. À l'instant t , elles sont situées respectivement aux points A_1 et A_2 repérés dans un référentiel galiléen par $\vec{R}_1 = \overrightarrow{OA_1}$ et $\vec{R}_2 = \overrightarrow{OA_2}$, avec les vitesses \vec{V}_1 et \vec{V}_2 ; on pose $\vec{r} = \overrightarrow{A_1A_2}$ et $r = \|\vec{r}\|$.

1. Donner l'expression de l'énergie potentielle d'interaction des deux masses.
2. Déterminer la position de leur centre d'inertie C . Quelle est la trajectoire de C ? Déterminer sa vitesse.
3. Calculer l'énergie cinétique des deux masses dans le référentiel barycentrique; montrer qu'elle est égale à celle d'une masse ponctuelle de vitesse $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ et de masse μ que l'on déterminera en fonction de m_1 et m_2 .
4. Montrer que le mouvement relatif de m_2 par rapport à m_1 , caractérisé par $\vec{r}(t)$, est équivalent à celui de cette masse ponctuelle soumise à une force que l'on explicitera et dont on précisera les caractéristiques.
5. À quelle condition portant sur r et $v = \|\vec{v}\|$ les deux masses restent-elles à *distance finie* l'une de l'autre?
- 6.a) À quelle condition sur r et v les deux masses restent-elles à *distance fixe* r_0 l'une de l'autre?
b) Déterminer dans ce cas la période T de leur mouvement, ainsi que la vitesse angulaire Ω , en fonction des masses, de r_0 et \mathcal{G} .

II

On étudie un cas particulier du problème à trois corps « restreint », à savoir :

- Deux masses m_1 et m_2 sont beaucoup plus grandes que la troisième m , soit $m_1 \gg m$ et $m_2 \gg m$. La masse m est supposée ponctuelle comme m_1 et m_2 .

- Les deux masses m_1 et m_2 , à distance constante l'une de l'autre, effectuent un mouvement de rotation à la vitesse angulaire Ω autour de leur centre d'inertie C . Ce mouvement, décrit au **I.6**, n'est pas affecté par la présence de la troisième masse m .

On ne considère dans cette partie que les situations où les trois masses restent alignées au cours du temps. La masse m est située au point A . On prendra la direction $\overrightarrow{A_1A_2}$ comme axe $x'Cx$ d'origine C , avec $\overrightarrow{CA_1} = -r_1\vec{e}_x$ et $\overrightarrow{CA_2} = r_2\vec{e}_x$, $\overrightarrow{CA} = x\vec{e}_x$, \vec{e}_x vecteur unitaire.

1. Exprimer, en fonction de x et à l'aide des paramètres du système, la composante selon $x'Cx$ de la force totale qui s'exerce sur la masse m dans le référentiel tournant à la vitesse angulaire Ω .

2. Montrer que dans ce référentiel tournant cette composante dérive d'une fonction $U(x)$ qui joue le rôle d'une « énergie potentielle ». Expliciter $U(x)$.

3. Effectuer une étude qualitative de $U(x)$ en fonction de x ; par une analyse graphique, montrer qu'il y a trois positions « d'équilibre » possibles pour la masse m et les situer qualitativement par rapport aux masses m_1 et m_2 .

4. Discuter de la stabilité de ces positions d'équilibre dans le référentiel tournant, vis-à-vis des déplacements selon l'axe $x'Cx$.

III

1. Trois masses, a priori différentes, m_1, m_2 et m_3 sont situées respectivement aux trois sommets A_1, A_2, A_3 , d'un triangle équilatéral de côté d ; soit C leur centre d'inertie.

\vec{F}_1 étant la résultante des forces de gravitation s'exerçant sur la masse m_1 , montrer que :

$$\vec{F}_1 = -Gm_1 \frac{(m_1 + m_2 + m_3)}{d^3} \overrightarrow{CA_1}$$

2. En déduire que, si les masses tournent dans leur plan avec une certaine vitesse angulaire commune Ω que l'on déterminera, elles sont en équilibre relatif.

On limite, dans toute la suite de cette partie, l'étude au cas où, comme en **II**, l'une des masses, $m_3 (= m)$, est beaucoup plus petite que les deux autres m_1 et m_2 , dont le mouvement circulaire n'est pas modifié par m . On prend la direction $\overrightarrow{A_1A_2}$ comme axe $X'CX$. La masse m , placée en A , est repérée par $\vec{R}(t) = \overrightarrow{CA}$ de coordonnées (X, Y) . On s'intéresse à la stabilité de la masse m au voisinage du sommet A_3 du triangle équilatéral de base A_1A_2 , en limitant d'abord

l'étude aux mouvements dans ce plan. On oriente l'axe $Y'CY$ de telle sorte que l'ordonnée de A_3 soit positive.

3. Écrire, dans le référentiel tournant, « l'énergie potentielle » $U(X, Y)$ dont dérive la somme des forces gravitationnelles et d'inertie d'entraînement agissant sur la masse m ; on posera $\|\overrightarrow{AA_1}\| = d_1(X, Y)$ et $\|\overrightarrow{AA_2}\| = d_2(X, Y)$.

4. Écrire l'expression vectorielle de l'accélération \vec{a} de la masse m dans le référentiel tournant, à l'aide du vecteur rotation $\vec{\Omega}$, de la vitesse $\vec{v}(v_x, v_y)$ dans ce référentiel et de $\overrightarrow{\text{grad}}(u)$ où $u(X, Y) = U(X, Y)/m$.

Dans la suite, on notera $u_x(X, Y) = \frac{\partial u(X, Y)}{\partial X}$, $u_{xy}(X, Y) = \frac{\partial^2 u(X, Y)}{\partial X \partial Y}$, etc..

5. En vue d'étudier la stabilité de m au voisinage du point A_3 , on pose $X = X_0 + x$, $Y = Y_0 + y$, où (X_0, Y_0) sont les coordonnées du point d'équilibre A_3 de la masse m , dont on ne demande pas le calcul explicite.

Écrire les équations du mouvement, en se limitant aux termes du premier ordre en x et y . Pour alléger l'écriture, on notera : $u_{xx} = u_{xx}(X_0, Y_0)$ $u_{xy} = u_{xy}(X_0, Y_0)$ etc..

6. On cherche des solutions du type : $x = a \exp(\lambda t)$, $y = b \exp(\lambda t)$, où a et b sont des constantes.

Montrer que λ doit vérifier l'équation caractéristique :

$$\lambda^4 + \lambda^2(4\Omega^2 + u_{xx} + u_{yy}) + (u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2) = 0$$

7. On admet que si l'on pose :

$$\lambda = \lambda' \Omega \quad m_1 = \alpha(m_1 + m_2) \quad m_2 = (1 - \alpha)(m_1 + m_2)$$

et que l'on évalue les dérivées partielles figurant dans l'équation caractéristique de la question **III.6**, la variable λ'^2 vérifie l'équation du second degré suivante :

$$\lambda'^4 + \lambda'^2 + \frac{27}{4}\alpha(1 - \alpha) = 0.$$

Soit Δ le discriminant de cette équation.

a) Que conclure sur la stabilité de la position d'équilibre si $\Delta \geq 0$?

b) Même question si $\Delta < 0$.

c) En déduire les valeurs de α pour lesquelles la position d'équilibre est stable.

8. Pour le système Lune - Terre, le rapport de la masse légère m_1 à la masse totale $(m_1 + m_2)$ est $\alpha = 0,012$. En considérant ce système comme isolé, quelles conclusions en tirez-vous quant à la stabilité de la position d'équilibre d'un petit objet dont la position formerait un triangle équilatéral avec les centres de la Terre et de la Lune ?

Même question pour le système Jupiter - Soleil pour lequel $\alpha = 0,001$. L'observation des « planètes troyennes », de même période de révolution que Jupiter autour du Soleil et faisant avec lui et le Soleil un triangle équilatéral, conforte-t-elle votre conclusion ?

9. Par une analyse qualitative des forces s'exerçant dans le référentiel tournant, étudier la stabilité de la position A_3 vis-à-vis de petits mouvements orthogonaux au plan XCY .

Deuxième problème

Quelques propriétés des gaz réels et des mélanges sous deux phases

Dans tout le problème, la température reste fixée et est notée T . R désigne la constante des gaz parfaits.

1. On considère un système formé d'un seul constituant.

a) Établir la relation entre l'enthalpie libre à la pression p_1 notée $G(p_1)$, l'enthalpie libre à la pression p_2 notée $G(p_2)$ et le volume V du système.

b) Que devient cette relation dans le cas où le système est un solide ou un liquide peu compressible ?

c) Que devient la relation dans le cas où le système est constitué par n moles de gaz parfait ? En déduire l'expression du potentiel chimique (enthalpie libre molaire) μ du constituant à la pression p en fonction du potentiel chimique standard μ° et de la pression standard p° .

2. Dans le cas d'un gaz réel la forme de l'expression précédente du potentiel chimique est conservée à condition de remplacer p par la fugacité f , fonction de p . On se propose de trouver le lien entre f et p .

a) Établir la relation entre f, p, T , le volume molaire V_m du gaz réel et le volume molaire V_m° du gaz parfait associé. On utilisera le fait que, lorsque la pression tend vers 0, le gaz réel se comporte comme un gaz parfait.

b) On appelle Z le facteur de compressibilité, qui représente un écart du comportement du gaz réel par rapport au gaz parfait associé :

$$Z(p) = \frac{pV_m}{RT}$$

Montrer que f peut s'écrire :

$$f = p \exp \left(\int_0^p \frac{Z(p') - 1}{p'} dp' \right)$$

c) On propose comme équation d'état d'un gaz réel l'équation de Van der Waals :

$$p + \frac{a}{V_m^2} = \frac{RT}{V_m - b}$$

dans laquelle a et b désignent deux constantes caractéristiques du gaz étudié. Quelle interprétation physique peut-on donner de ces constantes ?

En effectuant un développement limité de V_m au premier ordre en $\frac{ap}{R^2T^2}$ et $\frac{bp}{RT}$, calculer une expression approchée de f .

Application numérique. On donne pour l'ammoniac les valeurs numériques suivantes :

$$a = 0,42 \text{ Pa m}^6 \text{ mol}^{-2}, \quad b = 37 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}.$$

Calculer f pour $p = 10^6 \text{ Pa}$ et $T = 298,15 \text{ K}$. On prendra $R = 8,31 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$. L'un des deux paramètres a et b joue-t-il un rôle prépondérant ? Comment cela se traduit-il sur le volume molaire V_m ?

3. On étudie le comportement d'un mélange de constituants en équilibre sous deux phases liquide et gazeuse.

On peut établir (mais ce n'est pas demandé) pour le constituant i l'expression suivante pour la fugacité f_i :

$$f_i = a_i^L p_i^{\text{sat}} \exp \left(\int_0^{p_i^{\text{sat}}} \frac{Z_i(p'_i) - 1}{p'_i} dp'_i \right) \exp \left(\frac{1}{RT} \int_{p_i^{\text{sat}}}^{p_i} V_{im}^L dp'_i \right)$$

dans laquelle p_i^{sat} désigne la pression de vapeur saturante du constituant i pur, V_{im}^L son volume molaire à l'état liquide, a_i^L son activité dans la phase liquide, p_i sa pression dans la phase gazeuse, Z_i son facteur de compressibilité.

Que devient cette expression dans les cas suivants :

- a) Le liquide est incompressible sur l'intervalle de pression étudié.
- b) Le volume molaire du constituant i liquide est négligeable.
- c) La condition de la question précédente est réalisée et la phase gazeuse est un mélange idéal de gaz parfaits.
- d) Les conditions de la question précédente sont réalisées et le liquide est un mélange idéal où x_i^L désigne la fraction molaire du constituant i dans la phase liquide.

4. La relation de la question **3.d)** est vérifiée pour les constituants du mélange benzène (1)-toluène (2) aux pressions faibles et modérées. x_i^L et x_i^V désignent les fractions molaires du constituant i dans la phase liquide et dans la phase gazeuse respectivement. On donne les pressions de vapeur saturante à 90°C : $p_1^{\text{sat}} = 136,1 \times 10^3 \text{ Pa}$ et $p_2^{\text{sat}} = 54,2 \times 10^3 \text{ Pa}$. Établir les courbes isothermes d'ébullition et de rosée sur le diagramme représentant p en fonction respectivement de x_1^L et x_1^V à 90° C .

* *

*