

**2005 MP option SI****Physique et sciences de l'ingénieur****L'expérience Virgo . Réduction de certaines causes de bruit de fond.****1. Principe de l'expérience**

**Q.1.1** Pour une fréquence de 10 kHz, la longueur d'onde des ondes gravitationnelles est de 30 km, 10 fois supérieure à la taille des bras de l'interféromètre.

Les perturbations liées à l'onde gravitationnelle peuvent être considérées comme quasi-statiques si  $T_{og}$  est très supérieure à  $\frac{\ell_1}{c}$  et  $\frac{\ell_2}{c}$  ce qui est donc réalisé, mais aussi au temps de réponse du détecteur (photodiode).

**Q.1.2 Interféromètre de Michelson**

Les amplitudes complexes des 2 ondes optiques qui interfèrent sont respectivement, juste après recombinaison :

$$a_1 = a_{in} t_s r_1 r_s' e^{-2ikl_1} e^{i\omega_L t} = -\frac{1}{2} a_{in} e^{-2ikl_1} e^{i\omega_L t} \quad \text{et}$$

$$a_2 = a_{in} r_s r_2 t_s e^{-2ikl_2} e^{i\omega_L t} = +\frac{1}{2} a_{in} e^{-2ikl_2} e^{i\omega_L t} ; \text{ ces deux ondes étant cohérentes entre elles,}$$

$$a_{out} = a_1 + a_2 = \frac{a_{in}}{2} e^{i\omega_L t} (e^{-2ikl_1} - e^{-2ikl_2}).$$

$$\mathbf{Q.1.3} \quad \frac{P_{out}}{P_{in}} = \left| \frac{a_{out}}{a_{in}} \right|^2 \quad \text{d'où} \quad P_{out} = \frac{P_{in}}{4} |e^{-2ikl_1} - e^{-2ikl_2}|^2 \quad \text{soit}$$

$$P_{out} = \frac{P_{in}}{2} [1 - \cos[2k(l_1 - l_2)]] = P_{in} \sin^2 k(l_1 - l_2).$$

**Q.1.4** En différentiant,  $\delta P_{grav} = P_{in} k (\delta l_1 - \delta l_2) \sin 2k(l_1 - l_2)$  soit, avec

$$\delta l_1 - \delta l_2 = \frac{1}{2} h_{og} (l_1 + l_2), \quad \delta P_{grav} = \frac{1}{2} P_{in} k h_{og} (l_1 + l_2) \sin 2k(l_1 - l_2).$$

**Q.1.5**  $|\delta P_{grav}|$  est maximale pour  $\sin \alpha_0 = 1$ , donc  $\alpha_0 = \frac{\pi}{2} + p\pi$  ( $p$  entier), soit

$$k(l_1 - l_2) = \frac{\pi}{4} + p\frac{\pi}{2}, \quad \text{c'est à dire} \quad l_1 - l_2 = \frac{\lambda}{8} + p\frac{\lambda}{4} \quad (\text{ce qui correspond à une différence de}$$

marche multiple impair de  $\frac{\lambda}{4}$ ).

**Q.1.6**  $|\delta P_{grav}|_{\max} = P_{in} \frac{\pi}{\lambda} h_{og} (l_1 + l_2) = 2 \cdot 10^{-13} \text{ W} = 6 \cdot 10^{-15} P_{in}$  : c'est extrêmement faible

et certainement très difficile à mettre en évidence ; il convient donc d'augmenter  $l_1$  et  $l_2$ .

**Q.1.7 Bruit statistique de photons**

L'énergie des photons détectés en moyenne pendant la durée  $\Delta t$  est  $\langle N \rangle h\nu = \eta P_{out} \Delta t$

d'où  $\langle N \rangle = \eta \frac{P_{out}}{h\nu} \Delta t$ .

**Q.1.8** En écart-type relatif,  $\frac{\delta P_{shot}}{P_{out}} = \frac{\sigma_{ph}}{\langle N \rangle} = \frac{1}{\sqrt{\langle N \rangle}} = \sqrt{\frac{h\nu}{\eta P_{out} \Delta t}}$ , d'où

$$\delta P_{shot} = \sqrt{\frac{P_{out} h\nu}{\eta \Delta t}} = \sqrt{\frac{P_{in} h\nu}{\eta \Delta t}} |\sin k(l_1 - l_2)|.$$

**Q.1.9** 
$$\frac{|\delta P_{grav}|}{\delta P_{shot}} = \frac{1}{2} P_{in} k h_{og} (l_1 + l_2) \frac{|\sin 2k(l_1 - l_2)|}{|\sin k(l_1 - l_2)|} \sqrt{\frac{\eta \Delta t}{P_{in} h\nu}}$$

$$= k h_{og} (l_1 + l_2) \sqrt{\frac{\eta P_{in} \Delta t}{h\nu}} |\cos k(l_1 - l_2)|.$$

Le rapport signal / bruit est le meilleur pour  $k(l_1 - l_2) = p\pi$  ( $p$  entier), soit  $(l_1 - l_2) = p \frac{\lambda}{2}$ .

Pour  $l_1 = l_2$  cela correspond au réglage de la teinte plate ; cependant, à cause des coefficients de réflexion de la séparatrice, on a alors  $P_{out} = 0$ . Il faut donc se placer au voisinage de ce réglage, la photodiode détecte peu de lumière mais c'est là que le rapport signal / bruit est optimal.

**Q.1.10** On a donc  $1 = k h_{shot} (l_1 + l_2) \sqrt{\frac{\eta P_{in} \Delta t}{h\nu}} |\cos k(l_1 - l_2)|$  avec idéalement

$$|\cos k(l_1 - l_2)| \approx 1. \text{ D'où } h_{shot} = \frac{1}{k(l_1 + l_2)} \sqrt{\frac{h\nu}{\eta P_{in} \Delta t}} = \frac{\lambda}{2\pi(l_1 + l_2)} \sqrt{\frac{hc}{\lambda \eta P_{in} \Delta t}} \text{ soit}$$

finalement  $h_{shot} = \frac{1}{2\pi(l_1 + l_2)} \sqrt{\frac{hc \lambda}{\eta P_{in} \Delta t}}$ .

**Q.1.11**  $h_{shot} = \frac{1}{2\pi(l_1 + l_2)} \sqrt{\frac{hc \lambda f}{\eta P_{in}}}$  ;

pour  $f = 10$  Hz,  $\Delta t = 0,1$  s,  $h_{shot} = 3 \cdot 10^{-17}$

pour  $f = 10$  kHz,  $\Delta t = 10^{-4}$  s,  $h_{shot} \sim 10^{-15}$  : avec  $l_1 = l_2 = 1$  m, la sensibilité de l'interféromètre serait dans le meilleur des cas 30 000 fois supérieure à l'ordre de grandeur de  $h_{og}$  ; la détection des ondes gravitationnelles dans un laboratoire usuel est inenvisageable...

**Q.1.12 Amélioration du système optique**

En posant  $\beta = 2 k d$ , il vient  $|r_{FP}|^2 = \frac{r - e^{-i\beta}}{1 - r e^{-i\beta}} \frac{r - e^{i\beta}}{1 - r e^{i\beta}} = \frac{1+r^2 - 2r \cos \beta}{1+r^2 - 2r \cos \beta}$  donc

$|r_{FP}| = 1$  : cela signifie que la cavité ne provoque qu'une différence de phase donc n'absorbe pas. La périodicité de  $r_{FP}(\beta)$  est  $2\pi$ .

**Q.1.13** En différentiant  $e^{i\varphi} = \frac{r - e^{i\beta}}{1 - r e^{i\beta}}$ , il vient :  $\frac{i e^{i\varphi} d\varphi}{e^{i\varphi}} = \frac{-i e^{i\beta} d\beta}{r - e^{i\beta}} + \frac{i r e^{i\beta} d\beta}{1 - r e^{i\beta}}$  soit

$$\frac{d\varphi}{d\beta} = \frac{-e^{i\beta}}{r - e^{i\beta}} + \frac{r e^{i\beta}}{1 - r e^{i\beta}} = \frac{-1}{r e^{-i\beta} - 1} + \frac{r}{e^{-i\beta} - r} = \frac{e^{-i\beta}(r^2 - 1)}{r(e^{-2i\beta} + 1) - e^{-i\beta}(r^2 + 1)} \quad \text{ou}$$

encore 
$$\frac{d\varphi}{d\beta} = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos \beta} = \frac{1 - r^2}{(1 - r)^2 + 4r \sin^2 \frac{\beta}{2}}.$$

Pour  $\beta = -\pi + 2p\pi$ ,  $r_{FP} = 1$  et  $\varphi = 0 [2\pi]$  ;

pour  $\beta = 2p\pi$ ,  $r_{FP} = -1$  et  $\varphi = \pi [2\pi]$  et

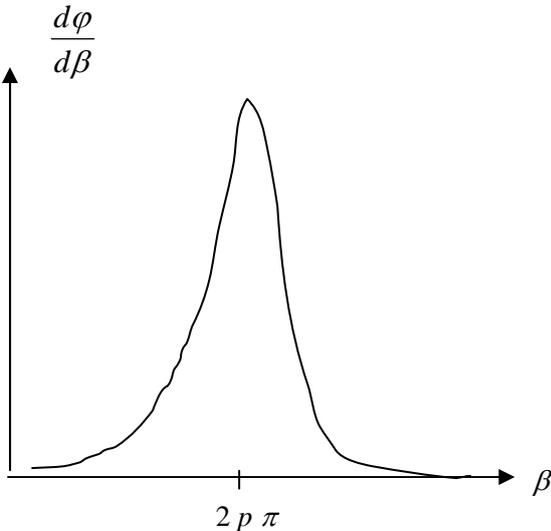
pour  $\beta = \pi + 2p\pi$ ,  $r_{FP} = 1$  et  $\varphi = 0 [2\pi]$ . Or  $\frac{d\varphi}{d\beta} \geq 0$  (car  $r < 1$ ) donc  $\varphi$  varie

de  $+2\pi$  pour  $\beta$  allant de  $(2p-1)\pi$  à  $(2p+1)\pi$ .

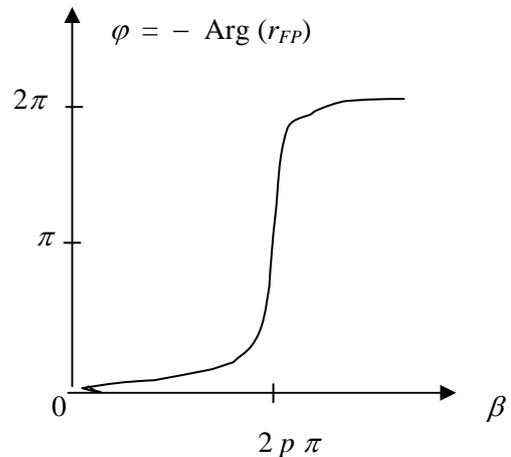
$$\left(\frac{d\varphi}{d\beta}\right)_{\beta=2p\pi} = \frac{1 - r^2}{(1 - r)^2} = \frac{1 + r}{1 - r}; \text{ pour } r = 0,98, \left(\frac{d\varphi}{d\beta}\right)_{\beta=2p\pi} \approx 100 : \text{ la variation de } \varphi$$

est extrêmement sensible ; en revanche  $\left(\frac{d\varphi}{d\beta}\right)_{\beta=2p\pi \pm \pi} = \frac{1 - r^2}{(1 + r)^2} = \frac{1 - r}{1 + r} \approx 0,01.$

On a plausiblement les graphes suivants :



(« fonction d'Airy »)



**Q.1.14** Pour un interféromètre de Michelson « simple », le coefficient de réflexion complexe pour un « bras » de longueur  $l$  serait  $-e^{-2ikl}$  ; on pose alors  $e^{-i\varphi} = -e^{-2ikl}$  soit par exemple  $\varphi = 2kl + \pi$  ; pour une variation  $\delta l$  de  $l$ ,  $d\varphi = 2k \delta l$ .

Pour le bras avec cavité de longueur  $d$ , réglé de telle sorte que  $\beta = 2kd \approx 2p\pi$ ,

$$d\varphi = \frac{1 + r}{1 - r} d\beta = 2k \frac{1 + r}{1 - r} \delta d : \text{ cela correspond à un bras simple dont la longueur serait}$$

$$l = \frac{1 + r}{1 - r} d \quad \text{soit numériquement } l = 100 d = 300 \text{ km.}$$

Par rapport à l'interféromètre de laboratoire  $l = 1 \text{ m}$ ,  $h_{shot}$  est divisé par  $3.10^5$ . Pour  $\Delta t = 0,1 \text{ ms}$   $h_{shot} \sim 3.10^{-21}$ , on y est presque...

**Q.1.15** L'essentiel de l'énergie lumineuse repart vers la source . En multipliant la puissance par 100,  $h_{shot}$  est divisé par 10 : alors la sensibilité de  $10^{-21}$  est atteinte pour  $\Delta t$  allant de 0,1 ms à 0,1 s .

## 2. Réduction du bruit de fond sismique : le super-atténuateur

**Q.2.1**  $\mathcal{R}_S$  est un référentiel non galiléen, en translation par rapport à  $\mathcal{R}_G$ , à la vitesse  $\dot{x}_0(t)\overrightarrow{x_G}$  : il faut prendre en compte une force d'inertie d'entraînement  $-M\ddot{x}_0(t)\overrightarrow{x_S}$  appliquée sur la masse  $M$ . La liaison selon l'axe  $\overrightarrow{y_S}$  étant supposée parfaite, le théorème du moment cinétique (ou dynamique) appliqué au pendule selon cet axe, écrit dans  $\mathcal{R}_S$ , conduit à l'équation suivante :

$$M L^2 \ddot{\theta} = -M g L \sin \theta + M L \ddot{x}_0 \cos \theta.$$

N.B. : cette équation peut aussi être obtenue en écrivant le théorème du moment dynamique dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}_G$ , le moment dynamique dans ce référentiel est  $M L^2 \ddot{\theta} - M L \ddot{x}_0 \cos \theta$ .

En linéarisant, on obtient  $L \ddot{\theta} + g \theta \approx \ddot{x}_0(t)$ .

**Q.2.2**  $x(t) = x_0(t) - L \sin \theta \approx x_0(t) - L \theta(t)$ ; en reportant  $L \theta(t) \approx x_0 - x$  dans l'équation linéarisée du mouvement, on obtient :  $\ddot{x} + \frac{g}{L} (x - x_0) \approx 0$ . En posant  $\omega_p^2 = \frac{g}{L}$ , carré de la pulsation propre obtenue lorsque  $x_0$  ne varie pas :  $\ddot{x} + \omega_p^2 x \approx \omega_p^2 x_0(t)$ .

En effectuant une transformation de Laplace, on obtient :  $(p^2 + \omega_p^2)X(p) = \omega_p^2 X_0(p)$ , d'où la

fonction de transfert : 
$$P(p) = \frac{\omega_p^2}{p^2 + \omega_p^2}.$$

Cette fonction de transfert est celle d'un filtre passe-bas du second ordre ; elle présente un pôle pour  $p = \pm i \omega_p$ , ce qui traduit une résonance, en régime sinusoïdal, au voisinage de la pulsation propre  $\omega_p$ . La singularité de  $P(i\omega)$  est due à l'absence de prise en compte d'un terme d'amortissement. Il convient enfin de rappeler que la linéarisation n'est valable que pour de petites valeurs de  $|\theta|$ .

### Q.2.3 Pré-isolation

Pour avoir l'équation du mouvement du pendule inversé, il suffit par rapport au cas du pendule simple précédent de changer  $\theta$  en  $\theta + \pi$  et d'ajouter le moment de rappel élastique  $-C\theta$ :

$$M l^2 \ddot{\theta} = +M g l \sin \theta - M l \ddot{x}_0 \cos \theta - C \theta, \text{ soit, en linéarisant :}$$

$$l \ddot{\theta} + \left( \frac{C}{M l} - g \right) \theta \approx -\ddot{x}_0 : \text{ pour obtenir un rappel, il faut donc que } C > M g l.$$

Cette fois  $x(t) = x_0(t) + l \sin \theta$  donc  $l\theta(t) \approx x - x_0$  et finalement

$$\ddot{x} + \left( \frac{C}{Ml^2} - \frac{g}{l} \right) (x - x_0) \approx 0.$$

**Q.2.4** On pose cette fois  $\omega_I^2 = \frac{C}{Ml^2} - \frac{g}{l}$  et on obtient une fonction de transfert du même

$$\text{type : } I(p) = \frac{\omega_I^2}{p^2 + \omega_I^2}.$$

Pour diminuer  $\omega_I$ , il convient de choisir une valeur de  $C$  très légèrement supérieure à  $Mgl$ .

$$f_I = 0,030 \text{ Hz}, \quad C = M(gl + 4\pi^2 l^2 f_I^2) = 25,2 \cdot 10^3 \text{ N.m.rad}^{-1}.$$

Soit  $f_1$  la première fréquence de résonance de la chaîne pendulaire :  $\frac{f_1}{f_I} \approx 6,7$  ; on peut donc estimer

que  $f_1$  se situe dans la partie asymptotique de pente  $-40$  dB/déc. du filtre passe-bas :

$$I(i\omega_1) \approx -\frac{\omega_I^2}{\omega_1^2} = -\frac{f_I^2}{f_1^2}; \text{ l'atténuation en dB est alors } 40 \log_{10} \left( \frac{f_I}{f_1} \right) \approx -33 \text{ dB (soit } 2,2 \cdot 10^{-2}$$

en échelle linéaire).

**Q.2.5** Cette propriété des forces d'inertie d'entraînement tient à ce que  $\mathcal{R}_S$  est en *translation* par

rapport à  $\mathcal{R}_G$ , le champ des accélérations d'entraînement dans  $\mathcal{R}_S$  est uniformément  $\ddot{x}_0(t) \overrightarrow{x_G}$ .

(Il est commode de décomposer le moment dynamique du pendule, le moment des forces de pesanteur et celui des forces d'inertie d'entraînement en 2 contributions : celle de la masse  $M$  d'une part, et celle de la tige ( $m, l$ ) d'autre part.)

Le théorème du moment dynamique par rapport à l'axe  $\overrightarrow{y_S}$ , appliqué à l'ensemble (tige + masse  $M$ ) dans le référentiel  $\mathcal{R}_S$ , conduit à l'équation suivante :

$$J \ddot{\theta} = - \left( Ml + m \frac{l}{2} \right) \ddot{x}_0 \cos \theta + \left( Ml + m \frac{l}{2} \right) g \sin \theta - C \theta, \text{ soit, en linéarisant :}$$

$$J \ddot{\theta} + \left[ C - \left( M + \frac{m}{2} \right) gl \right] \theta \approx - \left( M + \frac{m}{2} \right) l \ddot{x}_0(t).$$

N.B. : de même qu'en 2.1 et 2.3, cette équation peut aussi bien être obtenue à partir du théorème du moment dynamique écrit dans  $\mathcal{R}_G$ .

En reportant  $l\theta \approx x - x_0$  :

$$\frac{J}{l} \left( \ddot{x} - \ddot{x}_0 \right) + \left[ \frac{C}{l} - \left( M + \frac{m}{2} \right) g \right] (x - x_0) \approx - \left( M + \frac{m}{2} \right) l \ddot{x}_0(t)$$

On pose alors  $\omega_I'^2 = \frac{1}{J} \left[ C - \left( M + \frac{m}{2} \right) gl \right]$ , carré de la nouvelle pulsation propre, et on

obtient :

$$\left( \ddot{x} - \ddot{x}_0 \right) + \omega_I'^2 (x - x_0) \approx - \left( M + \frac{m}{2} \right) \frac{l^2}{J} \ddot{x}_0(t), \text{ ou encore :}$$

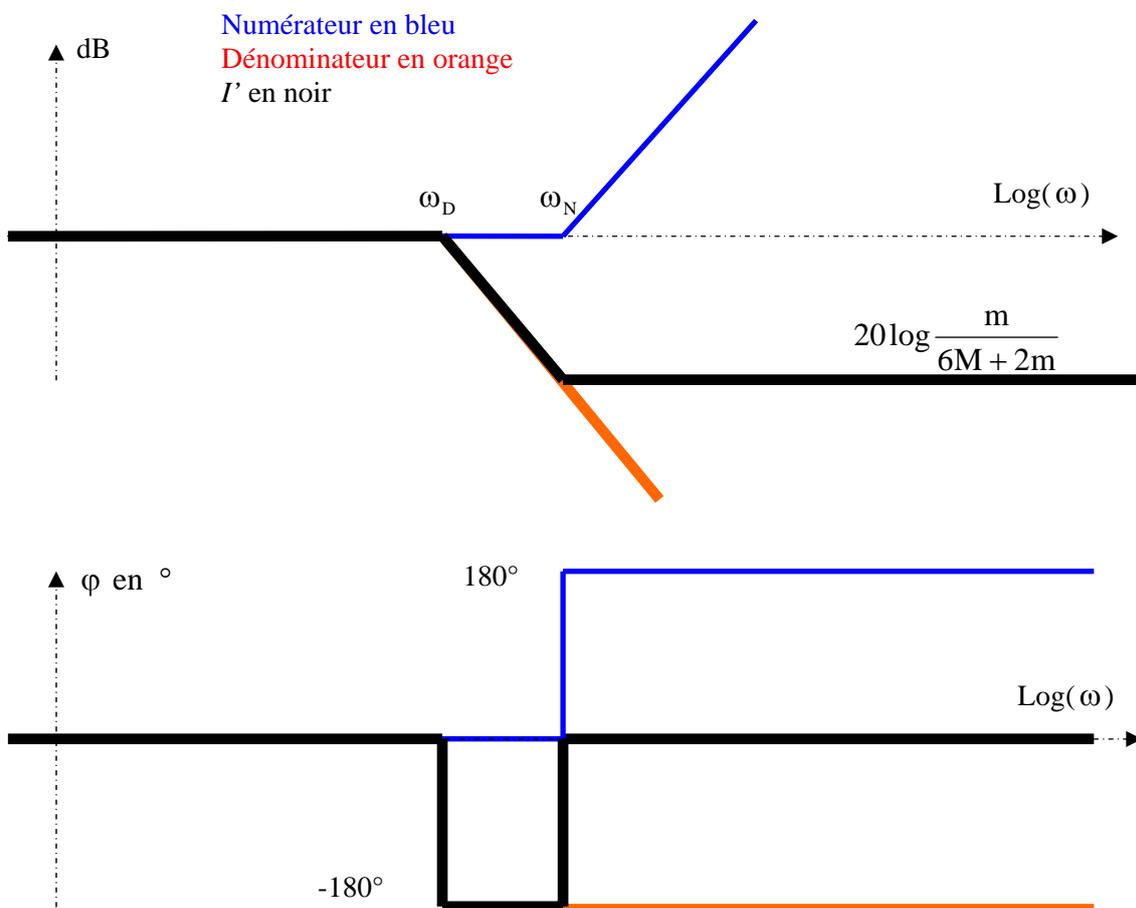
$$\ddot{x} + \omega_I'^2 x \approx \ddot{x}_0 \left[ 1 - \left( M + \frac{m}{2} \right) \frac{l^2}{J} \right] + \omega_I'^2 x_0.$$

La nouvelle fonction de transfert est alors :

$$I'(p) = \frac{p^2 \left[ 1 - \left( M + \frac{m}{2} \right) \frac{l^2}{J} \right] + \omega_I'^2}{p^2 + \omega_I'^2}$$

**Q.2.6**  $J = \left( M + \frac{m}{3} \right) l^2$  ; alors  $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} I'(j\omega) = 1 - \frac{M + m/2}{M + m/3} = \frac{-m}{6M + 2m} \neq 0$ .

Ce n'est plus un filtre passe-bas dès lors que la masse  $m$  de la tige n'est plus négligeable. On trouve le diagramme asymptotique suivant :



**Q.2.7 Contrôle inertiel**

La masse  $m$  de la tige étant à nouveau négligée, il suffit de reprendre l'équation 2.3 et ajoutant le moment  $-l F(t) \cos \theta \approx -l F(t)$  de l'effort de contrôle ; après linéarisation, on obtient :

$$M l^2 \ddot{\theta} + (C - M g l) \theta \approx -M l \ddot{x}_0(t) - l F(t) \text{ , soit, avec } l \theta \approx x - x_0 \text{ et en posant toujours } \omega_I^2 = \frac{C}{M l^2} - \frac{g}{l} :$$

$$\ddot{x} + \omega_I^2 x \approx \omega_I^2 x_0(t) - \frac{F(t)}{M} = \omega_I^2 \left[ x_0(t) - \frac{F(t)}{M \omega_I^2} \right].$$

En effectuant une transformation de Laplace, on trouve bien

$$(p^2 + \omega_I^2)X(p) = \omega_I^2 [X_0(p) - \alpha F(p)] \text{ où } \alpha = \frac{1}{M \omega_I^2} = \left( \frac{C}{l^2} - \frac{M g}{l} \right)^{-1}.$$

**Q.2.8**  $F(p) = \eta p [X(p) - X_0(p)]$  donc  $A(p) = \eta p$ .

Alors  $X(p) = I(p) \{X_0(p) - \alpha A(p) [X(p) - X_0(p)]\}$  d'où

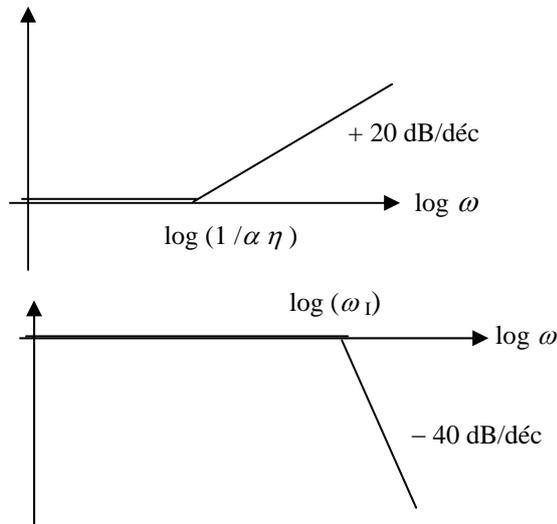
$$G(p) = I(p) \frac{1 + \alpha A(p)}{1 + \alpha A(p) I(p)} = \frac{\omega_I^2}{p^2 + \omega_I^2} \frac{1 + \alpha \eta p}{1 + \alpha \eta p \frac{\omega_I^2}{(p^2 + \omega_I^2)}} \text{ soit en définitive}$$

$$G(p) = \frac{\omega_I^2 (1 + \alpha \eta p)}{p^2 + \alpha \eta \omega_I^2 p + \omega_I^2} = \frac{1 + \alpha \eta p}{1 + \alpha \eta p + \frac{p^2}{\omega_I^2}}.$$

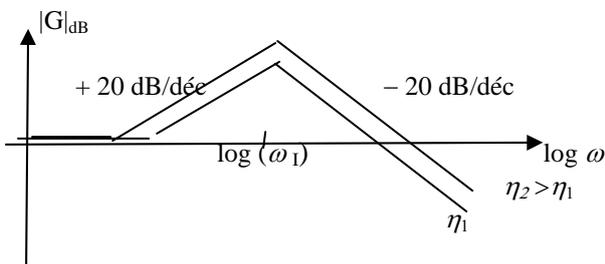
En régime sinusoïdal forcé,  $G(j\omega) = \frac{1 + j\alpha\eta\omega}{1 + j\alpha\eta\omega - \frac{\omega^2}{\omega_I^2}}.$

On voit qu'une augmentation de la valeur de  $\eta$  amortit la résonance au voisinage de  $\omega_I^2$ .

Pour obtenir le diagramme asymptotique de Bode, on peut tracer ceux qui correspondent respectivement au numérateur et au dénominateur de  $|G(j\omega)|$  :



On obtient finalement :



Lorsque  $\eta$  augmente, on voit sur ce diagramme que l'atténuation des mouvements sismiques est moins efficace, ce n'est donc pas une bonne solution.

**Q.2.9** On a donc  $C(p) = \gamma p^2$  où  $\gamma$  est une constante. On souhaite que  $C(p)A(p) = \eta p$  donc  $A(p) = \frac{\eta}{\gamma p}$  (intégrateur).

**Q.2.10** On a alors  $G(p) = \frac{I(p)}{1 + \alpha A(p)C(p)I(p)} = \frac{I(p)}{1 + \alpha \eta p I(p)}$

avec  $I(p) = \frac{\omega_I^2}{p^2 + \omega_I^2} = \frac{1}{1 + \frac{p^2}{\omega_I^2}}$ ,

soit  $G(p) = \frac{\omega_I^2}{p^2 + \omega_I^2 + \alpha \eta \omega_I^2 p} = \frac{1}{1 + \alpha \eta p + \frac{p^2}{\omega_I^2}}$  : il n'y a plus de terme

d'ordre 1 au numérateur et le mauvais comportement aux hautes fréquences lorsque  $\eta$  augmente a disparu.

**Q.2.11** En prenant  $F(p) = (\eta p + \delta)X(p)$ , on obtient de même

$$G(p) = \frac{1}{\frac{p^2}{\omega_I^2} + \alpha \eta p + (1 + \alpha \delta)} = \frac{1}{1 + \alpha \delta} \frac{1}{\frac{p^2}{(1 + \alpha \delta)\omega_I^2} + \frac{\alpha \eta p}{(1 + \alpha \delta)} + 1}$$

En faisant varier  $\delta$  on peut modifier la fréquence propre donc la fréquence de résonance.

### 3. Contrôle global

#### Q. 3.1 Création d'un signal d'erreur

Non, ce signal ne convient pas car  $\varepsilon(\omega_L)$  ne change pas de signe lorsque  $\omega_L$  « traverse »  $\omega_0$ .

**Q. 3.2** En posant  $V''(\omega_0) = \left. \frac{d^2 V(\omega_L)}{d\omega_L^2} \right)_{\omega_L = \omega_0}$ ,

$$\begin{aligned} V(\omega_L) &\approx V(\omega_0) + \frac{1}{2}V''(\omega_0)(\omega_L - \omega_0)^2 = V(\omega_0) + \frac{1}{2}V''(\omega_0)(\omega_c + a \cos \Omega t - \omega_0)^2 \\ &= V(\omega_0) + \frac{1}{2}V''(\omega_0) \left[ \omega_c^2 + 2a(\omega_c - \omega_0)\cos \Omega t - 2\omega_0 \omega_c + \omega_0^2 + \frac{a^2}{2}(1 + \cos 2\Omega t) \right]. \end{aligned}$$

Alors  $\varepsilon_\Omega = V''(\omega_0)a(\omega_c - \omega_0)$ .

$\varepsilon_\Omega$  change de signe lorsque  $\omega_L$  traverse  $\omega_0$  donc peut servir de signal d'erreur. Cependant, si l'extremum de  $V(\omega_L)$  est très étroit et que  $\omega_c$  s'écarte trop de  $\omega_0$ , ce signal risque de disparaître...

**Q.3.3**  $E_{inc} = E_0 e^{i\omega_L t} \exp(ib \sin \Omega t) \approx E_0 e^{i\omega_L t} (1 + ib \sin \Omega t)$  au premier ordre par rapport à  $b$ , soit  $E_{inc} \approx E_0 e^{i\omega_L t} \left(1 + \frac{b}{2} e^{i\Omega t} - \frac{b}{2} e^{-i\Omega t}\right)$  qui a pour spectre :  $\{\omega_L, \omega_L - \Omega, \omega_L + \Omega\}$ .

**Q.3.4**  $\beta(\omega_L + \Omega) \approx (2p_0 + 1)\pi$  et  $\beta(\omega_L - \Omega) \approx (2p_0 - 1)\pi$  sont hors de la zone de variation rapide de  $\varphi(\beta)$ ; alors  $\varphi(\omega_L \pm \Omega) \approx 0 [2\pi]$  et  $r_{FP}(\omega_L \pm \Omega) \approx 1$ .

En écrivant  $r_{FP}(\omega_L) = e^{-i\varphi(\omega_L)}$ , on obtient par superposition :

$$E_{refl} \approx E_0 e^{i\omega_L t} \left( e^{-i\varphi(\omega_L)} + ib \sin \Omega t \right)$$

**Q.3.5**  $P_r$  est proportionnelle à  $|E_{refl}|^2$  soit  $E_0^2 \left( e^{-i\varphi(\omega_L)} + ib \sin \Omega t \right) \left( e^{+i\varphi(\omega_L)} - ib \sin \Omega t \right)$

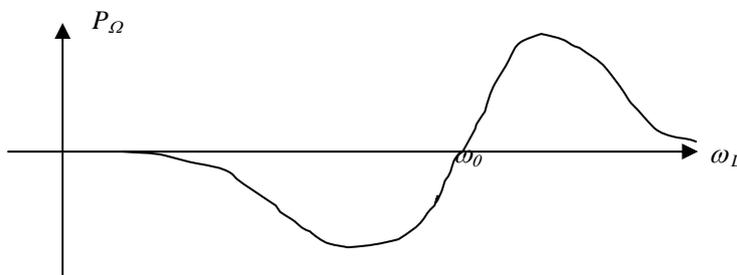
$$= E_0^2 \left[ 1 + b^2 \sin^2 \Omega t + ib \sin \Omega t \left( e^{i\varphi(\omega_L)} - e^{-i\varphi(\omega_L)} \right) \right]$$

$$= E_0^2 \left[ 1 + \frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{2} \cos 2\Omega t - 2b \sin \Omega t \sin \varphi(\omega_L) \right].$$

Donc  $P_r = P_i \left[ 1 + \frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{2} \cos 2\Omega t - 2b \sin \Omega t \sin \varphi(\omega_L) \right]$  : le terme de pulsation  $\Omega$  est

$$P_\Omega(\omega_L) = -2 P_i b \sin \varphi(\omega_L) \sin \Omega t .$$

**Q. 3. 6** Le graphe donnant l'allure de  $P_\Omega(\omega_L)$  a l'allure suivante :



Le signal de sortie du filtre passe-bas peut donc servir de signal d'erreur.

### Q.3.7 Asservissement des miroirs

(le sens positif pour  $\theta_A$  comme pour  $\theta_B$  est le sens horaire)

Pour le miroir (A), on reprend l'équation linéarisée de la question 2.1, en ajoutant le moment de la force  $\vec{F}$  et un terme d'amortissement :

$$M_m L^2 \ddot{\theta}_A \approx -M_m g L \theta_A + M_m L \ddot{x}_{0A} - L F(t) + M_m L \mu \dot{x}_A \quad \text{où } \mu \text{ est une constante}$$

positive ; avec  $L \theta_A \approx x_{0A} - x_A$ , il vient, en posant  $\omega_m^2 = \frac{g}{L}$

$$\ddot{x}_A + \mu \dot{x}_A + \omega_m^2 x_A = \omega_m^2 x_{0A} + \frac{F(t)}{M_m}.$$

De même pour le miroir (B) :  $\ddot{x}_B + \mu \dot{x}_B + \omega_m^2 x_B = \omega_m^2 x_{0B}$ , et par différence :

$$\Delta \ddot{x} + \mu \Delta \dot{x} + \omega_m^2 \Delta x = \omega_m^2 \Delta x_0 + \frac{F(t)}{M_m}. \text{ En posant } \mu = 2\xi \omega_m, \text{ où } \xi \text{ est le facteur}$$

d'amortissement (définition usuelle mais non donnée dans l'énoncé), on obtient, après transformation de Laplace :

$$\Delta X(p) \left[ \frac{p^2}{\omega_m^2} + \frac{2\xi}{\omega_m} p + 1 \right] = \Delta X_0(p) + \frac{F(p)}{M_m \omega_m^2}.$$

En posant  $G_0 = M_m \omega_m^2$ , cela s'écrit  $\Delta X(p) = G(p) [G_0 \Delta X_0(p) + F(p)]$  avec

$$G(p) = \frac{1}{M_m \omega_m^2} \frac{1}{\left[ \frac{p^2}{\omega_m^2} + \frac{2\xi}{\omega_m} p + 1 \right]}.$$

Numériquement, avec  $\xi = 0,5$ ,  $\left[ \frac{p^2}{\omega_m^2} + \frac{2\xi}{\omega_m} p + 1 \right] = 0,44 p^2 + 0,66 p + 1$  (avec  $|p|$  en s).

**Q.3.8** Selon le schéma de la fig. 12,  $\Delta X(p) = G(p) [G_0 \Delta X(p) + K C(p) (\Delta X_c(p) - \Delta X(p))]$  ce qui conduit à  $\Delta X(p) = H_c(p) \Delta X_c(p) + H_0(p) \Delta X_0(p)$  avec respectivement

$$H_c(p) = \frac{G(p) K C(p)}{1 + G(p) K C(p)} \text{ et } H_0(p) = \frac{G(p) G_0}{1 + G(p) K C(p)}.$$

### Q.3.9 Correcteur proportionnel

Avec un correcteur proportionnel  $C(p) = C_0$  on obtient un système de classe 0 (pas d'intégration dans la boucle), donc  $\varepsilon_\infty = \frac{e_0}{1 + K_{b0}}$  pour une entrée échelon  $e(t) = e_0 Y(t)$ .

L'erreur statique relative est  $\varepsilon_s = \frac{\varepsilon_\infty}{e_0} = \frac{1}{1 + K_{b0}}$  avec ici  $K_{b0} = \frac{C_0 K}{G_0} = \frac{C_0 K}{M_m \omega_m^2}$ .

Numériquement  $\varepsilon_s < 10^{-3} \Rightarrow K_{b0} > 10^3$  d'où  $C_0 > 10^3 \frac{M_m \omega_m^2}{K}$  soit

$$C_0 > 34.10^6 \text{ A.m}^{-1}.$$

**Q.3.10**  $\frac{\Delta X(p)}{\varepsilon(p)} = C(p) K G(p) = C_0 K G(p) = \frac{C_0 K}{M_m \omega_m^2} \frac{1}{\left[ \frac{p^2}{\omega_m^2} + \frac{2\xi}{\omega_m} p + 1 \right]}.$

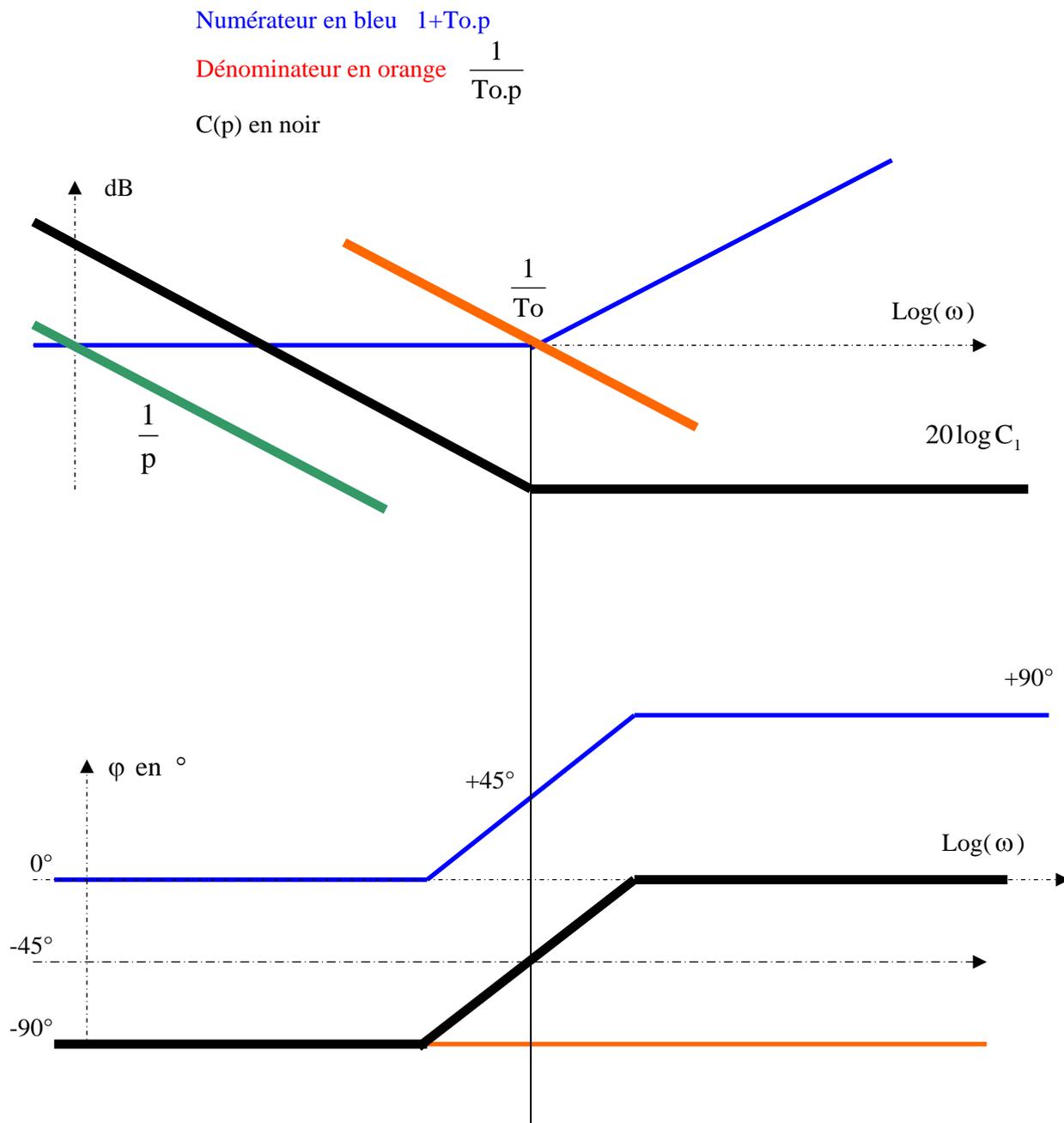
Cette fonction de transfert est du second ordre donc la marge de gain est infinie ; vu le fort gain  $\frac{C_0 K}{M_m \omega_m^2} > 10^3$  (soit 60 dB), la pulsation de coupure à 0 dB ( $\sim 47 \text{ rad.s}^{-1}$ ) est beaucoup plus grande

que  $\omega_m$  ( $1,5 \text{ rad.s}^{-1}$ ) et la marge de phase est presque nulle ( $\sim 2^\circ$ ) : la condition  $M_\varphi > 45^\circ$  n'est pas respectée, le correcteur ne peut pas assurer à la fois la précision et la marge de stabilité.

### Q.3.11 Correcteur proportionnel intégral

Correction Proportionnelle-Intégrale :  $C(p) = C_1 \frac{1 + T_{o.p}}{T_{o.p}}$

Diagramme de Bode du correcteur :



Le correcteur change la classe du système qui passe à 1, donc le système est précis pour une entrée échelon, quelque soit le gain de la boucle ouverte. Par contre il introduit un déphasage négatif, ce qui est gênant pour la stabilité.

**Q. 3.12** *Il y a une incompatibilité dans le cahier des charges au niveau du temps de réponse.*

On veut  $Tm < 0.003$  s et on a  $\omega_{0C} Tm = 3$ , soit  $\omega_{0C} > 10$  rad/s ; or à  $\omega_{0C} = 10$  rad/s on a déjà un  $\varphi$  de  $-170^\circ$  et comme le proportionnel intégral déphase encore, il est impossible de récupérer  $45^\circ$  de marge de phase.

Si on abandonne le critère temps de réponse, la marge de phase se situe à 2,4 rad/s.

On règle le correcteur à  $1/T_0$  à  $1/10$  de la pulsation de coupure à 0dB soit 0,24 rad/s.

Il faut ensuite un gain de 61dB pour revenir à 10 rad/s soit  $C_1 = 1,12 \cdot 10^3 \text{ A.m}^{-1}$ .

**Q. 3.13** L'introduction de la boucle et du correcteur  $C_f$  ne modifie que la fonction  $H_0$  qui devient

$$\frac{G(p)(Go - KC_f(p))}{1 + G(p)KC(p)} = H'_0(p). \text{ Pour annuler l'effet de } \Delta x_0, \text{ il suffit d'avoir un correcteur}$$

$$\text{proportionnel de gain } C_f(p) = \frac{Go}{K}.$$

**Q. 3.14** Avec ce correcteur on retrouve l'expression précédente (Q.3.8). Donc la perturbation n'a pas d'influence sur le réglage précédent.