X-ESPCI 2006 Physique I

I.1. Considérations de symétries:

Le plan passant par M et contenant l'axe est plan de symétrie : $\vec{E}$ lui est parallèle ($E_\theta = 0$) et $\vec{B}$ lui est perpendiculaire ($B_r = B_z = 0$).
Le plan passant par M et perpendiculaire à l'axe est, en électrostatique (ce que l'énoncé ne précisait pas...), plan de symétrie : $\vec{E}$ lui est parallèle ($E_z = 0$) et, en magnétostatique (id.) plan d'antisymétrie $\vec{B}$ lui est parallèle ($B_z = 0$) : $\vec{E} = E(\rho, \theta, z)\vec{e_\rho}$; $\vec{B} = B(\rho, \theta, z)\vec{e_\theta}$
Il y a symétrie de révolution ($\frac{\partial E}{\partial \theta} = 0$ et $\frac{\partial B}{\partial \theta} = 0$) et, en régime permanent, invariance par translation le long de l'axe ($\frac{\partial E}{\partial z} = 0$ et $\frac{\partial B}{\partial z} = 0$)

I.1.1 : $\vec{E} = E(\rho)\vec{e_\rho}$. On applique le théorème de Gauss à une surface cylindrique de rayon ρ, de longueur ℓ : $\oint\!\!\oint \vec{E}.\vec{n}\, d^2S = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$

$$\iint_{lat} E(\rho)\vec{e_\rho}.\vec{e_\rho}\, d^2S + \iint_{base\,1} E(\rho)\underbrace{\vec{e_\rho}.\vec{e_z}}_{=0} d^2S + \iint_{base\,2} E(\rho)\underbrace{\vec{e_\rho}(-\vec{e_z})}_{=0} d^2S = \frac{Q\ell}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

$$E(\rho).2\pi\rho\ell = \frac{Q\ell}{\varepsilon_0\varepsilon_r} \qquad \vec{E} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}.\frac{1}{\rho}\vec{e_\rho} \quad (\text{pour } \rho \in]\rho_1, \rho_2[)$$

I.1.2 : $V_1 - V_2 = -\int_2^1 E(\rho).\vec{e_\rho}.d\rho\vec{e_\rho} = \int_1^2 \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}.\frac{d\rho}{\rho} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}$

I.1.3 : $\boxed{\Gamma = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}}}$

I.1.4 : $\left.\begin{array}{l}\Gamma = 1,0.10^{-10}\,F\,m^{-1}\\ V_1 - V_2 = 10\,V\end{array}\right]$; E maximum pour $\rho = \rho_1$: $E_{max} = 16.10^3\,V$

I.1.5 : $\vec{B} = B(\rho)\vec{e_\theta}$. On applique le théorème d'Ampère sur un cercle d'axe Oz, de rayon ρ : $\oint_\Gamma \vec{B}\,\vec{d\ell} = \mu_0 I$ (cas de la magnétostatique)

$$\oint_\Gamma B(\rho)\vec{e_\theta}.\rho\, d\theta\,\vec{e_\theta} = 2\pi\rho\, B(\rho) = \mu_0 I \qquad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\vec{e_\theta}$$

I.1.6 : 

$\phi = \iint_{1/2\,plan} \vec{B}.\vec{n}\, d^2S$ On choisit $\vec{n} = +\vec{e_\theta}$, $\vec{B} = \vec{0}$ pour $\rho < \rho_1$ et $\rho > \rho_2$ (dit l'énoncé...)

$$\phi = \iint_{rect} B(\rho)\vec{e_\theta}.\vec{e_\theta}\, dz\, d\rho = \int_z^{z+\ell}\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} d\rho\, dz = \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1} \quad \text{puis } \ell = 1\,m$$

I.1.7 : On définit Λ par $\Lambda = \frac{\phi}{I}$ $\boxed{\Lambda = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}}$

I.1.8 : $\Lambda = 2,5.10^{-7}\,F\,m^{-1}$; B maximum pour $\rho = \rho_1$ $B_{max} = 4,0.10^{-5}\,T$

I.1.9 : Si I est répartie en volume dans le conducteur central, $\vec{B}$ est inchangé pour $\rho \in]\rho_1, \rho_2[$, mais non nul pour $\rho < \rho_1$; ϕ (donc Λ) est modifié.

I.2.1 L'équation de Maxwell-Faraday ($\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$) s'écrit

$\vec{rot}\left[\vec{E_0}\, e^{j(\omega t - kz)}\right] = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{B_0}\, e^{j(\omega t - kz)}\right]$

D'après le préambule, $\vec{rot}\left[\vec{E_0} e^{j(\omega t-kz)}\right] = e^{j(\omega t - kz)}\,\vec{rot}\,\vec{E_0} + \vec{grad}\, e^{j(\omega t-kz)} \wedge \vec{E_0}$

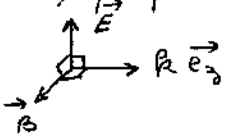
Or $\vec{rot}\,\vec{E_0} = \vec{0}$ car $E_{0z} = 0$ et $\vec{E_0}(x,y)$; $\vec{grad}\, e^{j(\omega t - kz)} = -jk\vec{e_z}\, e^{j(\omega t-kz)}$

Enfin $-\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{B_0}\, e^{j(\omega t-kz)}\right] = -j\omega\vec{B_0}\, e^{j(\omega t-kz)}$

Après simplification par $-je^{j(\omega t-kz)}$: $k\vec{e_z} \wedge \vec{E_0} = \omega \vec{B_0}$

Un calcul analogue à partir de l'équation de Maxwell-Ampère ($\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$) conduit à : $k\vec{e_z}\wedge\vec{B_0} = -\mu_0\varepsilon\omega\vec{E_0}$

On trouve localement la structure d'une onde plane progressive : $\vec{E}$ et $\vec{B}$ transverses, perpendiculaires entre eux, formant avec $k\vec{e_z}$ un trièdre direct :



I.2.2 : $k\vec{e_z}\wedge\vec{E_0} = k\vec{e_z}\wedge\left[-\frac{k\vec{e_z}\wedge\vec{B_0}}{\omega\varepsilon\mu_0}\right] = \frac{k^2}{\omega\varepsilon\mu_0}\left[-\vec{e_z}\underbrace{(\vec{e_z}\cdot\vec{B_0})}_{=0} + \vec{B_0}(\vec{e_z})^2\right] = \omega\vec{B_0}$

d'où $k^2 = \omega^2\varepsilon\mu_0 = \omega^2\varepsilon_r\varepsilon_0\mu_0 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_r$ $\quad k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r}$ (choix $k>0$)

La vitesse de phase est $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$

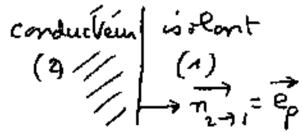
De $k\vec{e_z}\wedge\vec{E_0} = \omega\vec{B_0}$ (avec $\vec{E_0}\perp\vec{e_z}$), on tire $\|\vec{B_0}\| = \frac{k}{\omega}\|\vec{E_0}\| = \frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{c}\|\vec{E_0}\|$

I.2.3 : Les conditions aux limites sont les relations de continuité de $\vec{E}_{tangentiel}$ et $\vec{B}_{normal}$ sur les surfaces $\rho = \rho_1$ et $\rho = \rho_2$.

Pour $\rho = \rho_1$: dans le conducteur $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont nuls (dit l'énoncé...); entre les conducteurs $\vec{E}_{tang} = E_\theta\vec{e_\theta} + E_z\vec{e_z} = \vec{0}$ (car $\vec{E}\,/\!/\,\vec{e_\rho}$) et $\vec{B}_{normal} = B_\rho\vec{e_\rho} = \vec{0}$ (car $\vec{B}\,/\!/\,\vec{e_\theta}$).

Idem pour $\rho = \rho_2$

I.2.4 : Sur la surface du conducteur interne, la relation de discontinuité s'écrit $\underset{\vec{e_\rho}}{\vec{n}_{2\to1}} \wedge \underset{B(\rho_1)\vec{e_\theta}}{\vec{B_1}} + \underbrace{\vec{n}_{1\to2}\wedge\vec{B_2}}_{\vec{B}\text{ nul dans le conducteur}} = \mu_0\vec{j_\Sigma}$



Il apparait donc un courant surfacique : $\vec{j_\Sigma} = \frac{1}{\mu_0}B(\rho_1)\,\vec{e_\rho}\wedge\vec{e_\theta} = \frac{B(\rho_1)}{\mu_0}\vec{e_z}$

L'intensité est alors (à travers un cercle de rayon ρ_1) :

$I = 2\pi\rho_1\,\vec{j_\Sigma}\cdot\vec{e_z}$ $\quad I = \frac{2\pi\rho_1}{\mu_0}B_0(\rho_1)\,e^{j(\omega t-kz)}$ donc $I_0 = \frac{2\pi\rho_1}{\mu_0}B_0(\rho_1)$

En régime dépendant du temps, le théorème d'Ampère s'écrit :

$$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 \left(i + \varepsilon_0\varepsilon_r \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot\vec{n}\,d^2S \right) \quad (S) \text{ surface s'appuyant sur } (\Gamma)$$

On l'applique à un cercle de rayon ρ : $\oint \vec{B}\,\vec{dl} = \oint B(\rho,z)\vec{e_\theta}\cdot\rho\,d\theta\,\vec{e_\theta}$

$= B(\rho, z, t)\, 2\pi\rho$

La surface (S) s'appuyant sur le contour est le disque : $\vec{n} = \vec{e_z}$ et $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot\vec{n} = 0$ car $\vec{E}$ est porté par $\vec{e_\rho}$.

d'où $B(\rho, z, t)\cdot 2\pi\rho = \mu_0 I(z,t)$

$$\begin{cases} B(\rho, z, t) = \dfrac{\mu_0}{2\pi\rho} I(z,t) \\ B_0(\rho) = \dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi\rho} \end{cases}$$

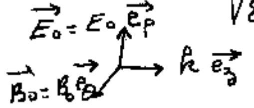
I.2.5 : La même relation de discontinuité pour $\vec{B}$ sur la surface $\rho = \rho_2$, mais avec $\vec{n}_{2\to1} = -\vec{e_\rho}$, conduit à $\vec{j_\Sigma} = -\frac{B(\rho_2)}{\mu_0}\vec{e_z}$, donc à une intensité $I_2 = +2\pi\rho_2\left(-\frac{B(\rho_2)}{\mu_0}\right) = -2\pi\rho_2 \times \frac{\mu_0 I}{\mu_0\, 2\pi\rho_2} = -I(z,t)$

(courant opposé à $I(z,t)$ au même instant, à la même cote).

I.3.1. Le déplacement élémentaire sur une courbe plane d'un plan z fixe est $\vec{dl} = d\rho\,\vec{e_\rho} + \rho\,d\theta\,\vec{e_\theta}$. D'où $U(z,t) = -\int_2^1 E_0(\rho)\,e^{j(\omega t - kz)}\,\vec{e_\rho}\cdot(\underbrace{d\rho\,\vec{e_\rho}}_{=1} + \underbrace{\rho\,d\theta\,\vec{e_\theta}}_{=0})$

$U(z,t) = e^{j(\omega t - kz)}\int_1^2 E_0(\rho)\,d\rho$; $U(z,t)$ ne dépend donc pas de la courbe choisie pour aller de ρ_1 à ρ_2. $U_0 = \int_1^2 E_0(\rho)\,d\rho$. Or $E_0(\rho) = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} B_0(\rho) = \frac{c\mu_0 I_0}{\sqrt{\varepsilon_r}\,2\pi\rho}$

D'où $U_0 = \frac{c\mu_0 I_0}{\sqrt{\varepsilon_r}\,2\pi}\int_1^2 \frac{d\rho}{\rho} = \frac{c\mu_0 I_0}{\sqrt{\varepsilon_r}\,2\pi}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}$



$\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ implique $\vec{E} = -\vec{grad}\,V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ où $\left(-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)$ est le champ électromoteur de Neumann et $\vec{A}$ le potentiel vecteur dont dérive $\vec{B}$ ($\vec{B} = \vec{rot}\,\vec{A}$).

Donc $\vec{E}$ n'est pas le gradient d'un potentiel scalaire V.

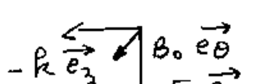
I.3.2 : $Z_c = \frac{U(z,t)}{I(z,t)} = \frac{U_0\,e^{j(\omega t - kz)}}{I_0\,e^{j(\omega t - kz)}} = \frac{U_0}{I_0} = \frac{c\mu_0}{\sqrt{\varepsilon_r}\,2\pi}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}$

Z_c ne dépend ni du temps t, ni de la position z le long du câble.

I.3.3 : D'après I.1.3 et I.1.7 : $\sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{(2\pi)^2\varepsilon_r\varepsilon_0}\left(\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}\,2\pi}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}\times\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$

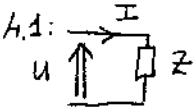
Or $c\mu_0 = \frac{\mu_0}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$. Donc $Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$

I.3.4 : Pour une onde se propageant en sens inverse, on remplace $k\vec{e_z}$ par $(-k\vec{e_z})$ avec $k>0$: E_0 et B_0 sont de signes opposés : $E_0(\rho) = -\frac{c\mu_0 I_0}{\sqrt{\varepsilon_r}\,2\pi\rho}$



Par les mêmes calculs, on obtient ($Z_c>0$) : $\frac{U(z,t)}{I(z,t)} = -Z_c$

I.3.5 : $Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} = 50\,\Omega$; $v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = 2.10^8\, m s^{-1}$

I.4.1 :  Il faut $U(0,t) = Z\, I(0,t)$. Or pour une onde unique se propageant vers $z \nearrow$, on a trouvé $U(z,t) = Z_c\, I(z,t)$ pour tout z. Si $Z \neq Z_c$, il ne peut donc pas y avoir une seule onde progressive ; il y a réflexion du signal en bout de ligne (en $z=0$) et existence d'une onde progressive vers $z \searrow$: $U(z,t) = U_{inc}(z,t) + U_{ref}(z,t) = A\, e^{j(\omega t - kz)} + B\, e^{j(\omega t + kz)}$

Pour les ondes de courant :
$$\begin{cases} I_{inc}(z,t) = \dfrac{U_{inc}}{Z_c}(z,t) = \dfrac{A}{Z_c}\, e^{j(\omega t - kz)} \\ I_{ref}(z,t) = -\dfrac{U_{ref}}{Z_c}(z,t) = -\dfrac{B}{Z_c}\, e^{j(\omega t + kz)} \end{cases}$$

$$I(z,t) = \frac{1}{Z_c}\left[A\, e^{j(\omega t - kz)} - B\, e^{j(\omega t + kz)}\right]$$

La condition en $z = 0$ s'écrit $(A+B)\, e^{j\omega t} = \frac{Z}{Z_c}(A-B)\, e^{j\omega t}$; $\frac{Z}{Z_c} = \frac{A+B}{A-B}$

I.4.2 : En posant $r = \frac{B}{A}$, il vient $\frac{Z}{Z_c} = \frac{1+r}{1-r}$ donc $r = \frac{Z/Z_c - 1}{Z/Z_c + 1} = \frac{Z - Z_c}{Z + Z_c}$

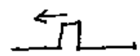
On retrouve $r = 0$ (absence d'onde réfléchie) pour $Z = Z_c$.

Pour un circuit ouvert : $r = 1$ $\quad U = A\, e^{j\omega t}\left[e^{-jkz} + e^{jkz}\right] = 2A \cos kz\, e^{j\omega t}$

Le cable est le siège d'ondes stationnaires (nœuds, ventres, etc...)

Pour un circuit en court-circuit, $r = -1$; $U = -2iA \sin kz\, e^{j\omega t}$ (id...)

I.4.3 : Les résultats se généralisent à tout signal TEM (même non monochromatique) si la propagation se fait sans déformation du signal, ainsi que la réflexion, donc si ε_r (pour la propagation) et Z (pour la réflexion) ne dépendent pas de ω. En particulier, en ce qui concerne le câble, il faut que ε_r ne dépendent pas de ω : il n'y a pas dispersion.

I.4.4 : extrémité ouverte   $r = 1$ pour U

U incident $\quad U$ réfléchi $\quad$ (alors -1 pour I)

extrémité en court-circuit   $r = -1$ pour U

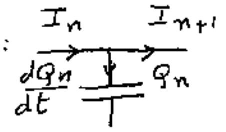
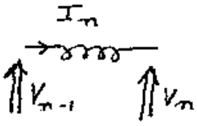
U incident $\quad U$ réfléchi $\quad$ (alors $+1$ pour I)

I.4.5 : Il n'y a pas réflexion si $r = 0$, $Z_c = Z = R$. Il faut $R = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} = 50\,\Omega$

I.4.6 : Si le câble transmet correctement le signal (sans signal réfléchi en bout de ligne), il est fermé sur Z_c. A l'entrée, il présente aussi l'impédance Z_c ($= R = 50\,\Omega$). Pour qu'il y ait adaptation d'impédance, il faut que le générateur ait lui aussi une impédance $R = 50\,\Omega$.

puissance reçue par R : $P = \frac{R}{(R+R_g)^2} U^2$; $\frac{dP}{dR} = \frac{U^2}{(R+R_g)^3}\left[R_g - R\right]$

P est donc maximale si $R = R_g$ et il y a "adaptation d'impédance"

II.1.1:  $\dfrac{dQ_n}{dt} = I_n - I_{n+1}$ (i)  $V_{n-1} - V_n = -\left(-L\dfrac{dI_n}{dt}\right)$ (ii)

II.1.2: $Q_n = C\,V_n$; par dérivation de (i) $C\dfrac{d^2V_n}{dt^2} = \dfrac{dI_n}{dt} - \dfrac{dI_{n+1}}{dt}$

Avec (ii) : $C\dfrac{d^2V_n}{dt^2} = \dfrac{1}{L}\left(V_{n-1} - V_n\right) - \dfrac{1}{L}\left(V_n - V_{n+1}\right)$

D'où $\dfrac{d^2V_n}{dt^2} = \dfrac{1}{LC}\left(V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n\right)$ avec $\boxed{\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}}$

II.2: Soit $\mathcal{E}_n = \frac{1}{2}CV_n^2 + \frac{1}{2}LI_n^2$ l'énergie emmagasinée dans la cellule n.

$\dfrac{d\mathcal{E}_n}{dt} = CV_n\dfrac{dV_n}{dt} + LI_n\dfrac{dI_n}{dt} = V_n\dfrac{dQ_n}{dt} + I_n\left(L\dfrac{dI_n}{dt}\right) = V_n\left(I_n - I_{n+1}\right) + I_n\left(V_{n-1} - V_n\right)$
avec (i) et (ii)

$\dfrac{d\mathcal{E}_n}{dt} = I_n V_{n-1} - V_n\, I_{n+1}$.

$I_n V_{n-1}$ est la puissance qui passe (de gauche à droite) au noeud (n-1) ; elle entre dans la cellule : P_e

$I_{n+1} V_n$ passe au noeud n ; elle sort de la cellue : P_s

$\dfrac{d\mathcal{E}_n}{dt} = P_e - P_s$: l'augmentation de l'énergie emmagasinée dans la cellule $d\mathcal{E}_n$ (pendant dt) est égale à l'énergie qui entre $P_e\,dt$ moins celle qui sort $P_s\,dt$: il y a conservation de l'énergie (normal : pas de résistance donc pas de perte)

II 3.1 : $A_n = A_0\, e^{-jn\alpha}$

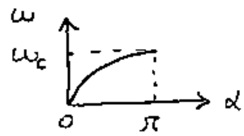
II 3.2 : On reporte dans l'équation de propagation avec $\begin{cases} \underline{V_{n+1}} = \underline{V_n}\, e^{-j\alpha} \\ \underline{V_{n-1}} = \underline{V_n}\, e^{+j\alpha} \end{cases}$

$$-\omega^2\,\underline{V_n} = \omega_0^2\left(\underline{V_n}\,e^{-j\alpha} + \underline{V_n}\,e^{j\alpha} - 2\underline{V_n}\right) \quad \text{d'où} \quad \omega^2 = \omega_0^2\left(2 - e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}\right)$$

$\omega^2 = \omega_0^2 \cdot 2\left(1 - \cos\alpha\right) = \omega_0^2 \cdot 4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$ $\quad \boxed{\omega = 2\omega_0\left|\sin\dfrac{\alpha}{2}\right|}$ $\quad (\omega > 0)$

II.3.3: $\omega \in [0, 2\omega_0]$ $\quad \omega_c = 2\omega_0$

On peut se limiter à $\alpha > 0$ (propagation vers la droite) ; $\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|$ est 2π-périodique ; on peut donc se limiter à $\alpha \in [0, \pi]$



II.3.4: On obtient à t, pour la cellule n, la phase $(\omega t - n\alpha)$ qui était pour la cellule 0 à $(t - \tau_n)$

avec $\tau_n = \dfrac{n\alpha}{\omega}$: $\omega t - n\alpha = \omega(t - \tau_n)$. Pendant τ_n, il y a eu propagation de la phase de la cellue 0 à la cellule n.

$$v_\varphi = \frac{n}{\tau_n} = \frac{\omega}{\alpha}$$

II.3.5: Pour $\omega \ll \omega_0$, donc $\omega \ll \omega_c$, on a $\alpha \ll \pi$ et $\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| \sim \frac{\alpha}{2}$ $\quad (\alpha > 0)$

$\omega \sim 2\omega_0 \cdot \dfrac{\alpha}{2} = \omega_0\alpha$ et $v_\varphi = \omega_0\ \forall\omega$: il n'y a pas dispersion

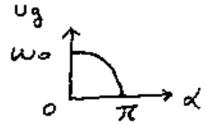
(donc pas de déformation d'un signal très basse fréquence au cours de la propagation)

"L'effet d'une cellule" (le passage de la cellule $(n-1)$ à la cellule (n)) produit un retard $\tau = \frac{\alpha}{\omega} = \frac{1}{\omega_0}$

II. 3. 6 : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2.10^6 \text{ rad s}^{-1}$; $\tau = \frac{1}{\omega_0} = 5.10^{-7} s$; $n = \frac{t}{\tau} = 200$

$\ell = v_\varphi . t$ avec v_φ de I. 3.5 : $\ell = 2.10^8 \times 10^{-4} = 2.10^4 m = 20 km$

II. 4. 1 : $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ vitesse de propagation du paquet d'ondes donc de l'information qu'il porte ; ici $v_g = \frac{d\omega}{d\alpha} = \omega_0 \cos\frac{\alpha}{2}$



Pour $\alpha \ll \pi$: cas non dispersif $v_g = v_\varphi = \omega_0$

Pour $\alpha = \pi$: $v_g = 0$ Il n'y a pas propagation (de l'énergie, de l'information...) le long du câble (existence d'ondes stationnaires etc...)

II. 4. 2 : D'après (ii) $\quad j\omega L\, B_n\, e^{j\omega t} = (A_{n-1} - A_n) e^{j\omega t} = (e^{j\alpha} A_n - A_n) e^{j\omega t}$

$$B_n = \frac{A_n}{j\omega L}(e^{j\alpha} - 1) = \frac{A_n}{j\omega L} . e^{j\alpha/2}\left(e^{j\alpha/2} - e^{-j\alpha/2}\right) = \frac{2\, e^{j\alpha/2}}{\omega L}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right) A_n = \frac{1}{L\omega_0} e^{j\alpha/2} A_n$$

Il faut utiliser la notation réelle : $A_n = |A_n| e^{j\varphi_n}$

$$\left.\begin{aligned} V_n(t) &= \mathcal{R}e\left(A_n e^{j\omega t}\right) = |A_n| \cos(\omega t + \varphi_n) \\ I_n(t) &= \mathcal{R}e\left(B_n e^{j\omega t}\right) = \frac{1}{L\omega_0}|A_n| \cos\left(\omega t + \varphi_n + \frac{\alpha}{2}\right) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \left\langle \tfrac{1}{2} C V_n^2 \right\rangle &= \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} C |A_n|^2 \\ \left\langle \tfrac{1}{2} L I_n^2 \right\rangle &= \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} \tfrac{L}{L^2\omega_0^2} |A_n|^2 \end{aligned}$$

Or $\frac{L}{L^2\omega_0^2} = \frac{1}{L} \times LC = C$.

D'où $\left\langle \frac{1}{2} C V_n^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} L I_n^2 \right\rangle$: en moyenne, autant d'énergie stockée sous forme électrique (dans C) que sous forme magnétique (dans L).

$E = \frac{1}{2} C |A_n|^2$

$$P = \langle V_{n-1}(t)\, I_n(t) \rangle = \left\langle |A_n| \cos(\omega t + \varphi_n + \alpha) . \frac{1}{L\omega_0} |A_n| \cos\left(\omega t + \varphi_n + \frac{\alpha}{2}\right) \right\rangle$$

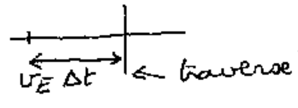
$$= \frac{|A_n|^2}{L\omega_0}\left[\underbrace{\left\langle \cos^2\left(\omega t + \varphi_n + \frac{\alpha}{2}\right) \cos\frac{\alpha}{2} \right\rangle}_{\Rightarrow \frac{1}{2}} - \underbrace{\left\langle \cos\left(\omega t + \varphi_n + \frac{\alpha}{2}\right) . \sin\left(\omega t + \varphi_n + \frac{\alpha}{2}\right) \sin\frac{\alpha}{2} \right\rangle}_{\Rightarrow 0} \right]$$

$P = \frac{|A_n|^2}{2L\omega_0} \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} C |A_n|^2 \times \frac{1}{LC\omega_0} . \cos\frac{\alpha}{2}$; or $\frac{1}{LC\omega_0} = \omega_0$ et $\omega_0 \cos\frac{\alpha}{2} = v_g$

D'où $P = E . v_g \qquad v_g = \frac{P}{E}$

On retrouve le fait (classique) que la vitesse de groupe est la vitesse à laquelle avance l'énergie en moyenne. Pour cela, faisons un bilan pendant $\Delta t \gg T = \frac{2\pi}{\omega}$ (pour raisonner sur les moyennes). En un point de la ligne, l'énergie qui "passe" entre t et $t + \Delta t$ (donc $P\Delta t$) est l'énergie qui, à t, était stockée sur la longueur $v_E \Delta t$ (si l'énergie avance avec v_E)

$E . v_E \Delta t = P \Delta t$ donc $v_E = \frac{P}{E}$. On trouve ici $v_E = v_g$



II.4.3 : $v_\varphi = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{2\omega_0}{\alpha}\sin\frac{\alpha}{2}$; $v_\varphi(\alpha)$ donc $v_\varphi(\omega)$.

Un signal non monochromatique est la superposition de signaux monochromatiques de pulsations différentes (notion de T.F.) qui se propagent à des vitesses différentes ($v_\varphi(\omega)$). Il va donc se déformer au cours de la propagation (il y a dispersion) avec étalement du paquet d'onde.

II 5.1 : $Z_c = \frac{V_n}{I_{n+1}} = \frac{A_n}{B_{n+1}} = \frac{A_n}{\frac{1}{L\omega_0} e^{j\alpha/2} A_n e^{-j\alpha}} = L\omega_0\, e^{j\alpha/2} = L\omega_0\left(\cos\frac{\alpha}{2} + j\sin\frac{\alpha}{2}\right)$

II.5.2 : $Z_c = R_c + jX_c$; d'où $X_c = jL\omega_0\sin\frac{\alpha}{2} = j\frac{L\omega}{2} = jL'\omega$ avec $L' = L/2 = 12{,}5\,\mu H$

II.5.3 : $R_c = L\omega_0\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{L}{C}}\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{1-\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)^2} = \sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{1-\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}$

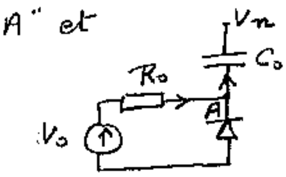
Pour $\omega \ll \omega_0$: $R_c \# \sqrt{\frac{L}{C}} = 50\,\Omega$

Pour $\omega \to \omega_c$, $R_c \to 0$

II.5.4 : Pour qu'il n'y ait pas de signal réfléchi, il faut donc fermer la ligne sur $Z_c = R_c + j\omega L'$, donc sur une résistance en série avec une inductance.

III.1.1. La diode est une "varicap".

- On souhaite que la diode en série avec C_0 $\left(\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_D}\right)$ soit équivalente à la diode seule ; il faut $\frac{1}{C_D} \gg \frac{1}{C_0}$, donc $C_0 \gg C_D$ (C_D vaut de 1 à 150 pF)
- On souhaite que V_D ($= V_0 - R_0 I_{R_0}$) soit $(V_0 + V_n)$. Il n'y a pratiquement pas de courant dans la diode (montée en inverse) : I_{R_0} traverse C_0, donc n'a pas de composante continue : "V_0 continu se retrouve en A" et $I_{R_0} \cdot R_0 = -V_n$ est alternatif.



"A travers C_0", on veut que "V_n se retrouve en A" ; il faut que la chute de tension alternative aux bornes de C_0 soit négligeable ; elle vaut $\underline{\Delta V}_{C_0} = \frac{1}{j\omega C_0}\underline{I}_{R_0} = -\frac{1}{j\omega R_0 C_0}\underline{V_n}$. Il faut donc $R_0 C_0 \omega \gg 1$ (on choisit R_0 et C_0 grands).

III 1.2 : C_L et C_D étant montées en parallèle, $C_{eq} = C_L + C_D = \frac{1}{a+bV}$ et ceci constitue la "capacité variable" soumise à V : $\frac{dQ}{dV} = C_{eq}$; $dQ = \frac{dV}{a+bV}$; $Q = \frac{1}{b}\ln\left(V + \frac{a}{b}\right) + K$

$Q(V_0 + V_n) = \frac{1}{b}\ln\left(V_0 + V_n + \frac{a}{b}\right) + K = \frac{1}{b}\ln\left[\left(V_0 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{V_n}{V_0 + \frac{a}{b}}\right)\right] + K = \frac{1}{b}\ln\left(1 + \frac{V_n}{V_0 + \frac{a}{b}}\right) + \text{cste}$

On obtient $Q_0 = 1/b$ et $F_0 = V_0 + a/b$

III 2.1 : On reprend II.1 : (ii) est inchangée ; (i) s'écrit avec $\frac{dQ_n}{dt} = Q_0\frac{d}{dt}\left[\ln\left(1 + \frac{V_n}{F_0}\right)\right]$

$$\frac{d^2Q_n}{dt^2} = Q_0\frac{d^2}{dt^2}\left[\ln\left(1 + \frac{V_n}{F_0}\right)\right] = \frac{dI_n}{dt} - \frac{dI_{n+1}}{dt} = \frac{1}{L}\left(V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n\right)$$

↑ avec (ii)

III.2.2: gros calcul!

$$V_{n+1}+V_{n-1} = \frac{F_0}{c_0^2}\frac{d^2}{dt^2}\Big[\ln\big[ch(\Omega c_0 t-(n+1)P)\big]+\ln\big[ch(\Omega c_0 t-(n-1)P)\big]\Big]$$

$$= \frac{F_0}{c_0^2}\frac{d^2}{dt^2}\Big[\ln\big[ch(\Omega c_0 t-(n+1)P)\,.\,ch(\Omega c_0 t-(n-1)P)\big]\Big]$$

$$\underset{\uparrow \text{ préambule}}{=} \frac{F_0}{c_0^2}\frac{d^2}{dt^2}\Big[\ln\big[ch^2(\Omega c_0 t-nP)+sh^2P\big]\Big]$$

$$V_{n+1}+V_{n-1}-2V_n = \frac{F_0}{c_0^2}\frac{d^2}{dt^2}\Big[\ln\big[ch^2(\Omega c_0 t-nP)+sh^2P\big]-\ln\big[ch^2(\Omega c_0 t-nP)\big]\Big]$$

$$= \frac{F_0}{c_0^2}\frac{d^2}{dt^2}\Big[\ln\Big[1+\frac{sh^2P}{ch^2(\Omega c_0 t-nP)}\Big]\Big]$$

$$= \frac{F_0}{c_0^2}\frac{d^2}{dt^2}\Big[\ln\Big[1+\frac{sh^2P}{F_0\Omega^2}V_n\Big]\Big] \quad ; \text{ or } sh^2P=\Omega^2$$

2^e membre $= Q_0 L \dfrac{d^2}{dt^2}\Big[\ln\Big[1+\dfrac{V_n}{F_0}\Big]\Big]$ (1^e membre) si $Q_0 L = \dfrac{F_0}{c_0^2}$

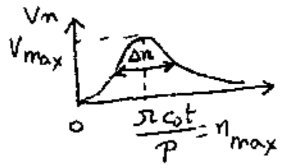
La solution proposée convient...

III.2.3: $\dfrac{dV_n}{dn} = -2\dfrac{F_0\Omega^2}{ch^3(\Omega c_0 t-Pn)}\times(-P)\,sh(\Omega c_0 t-Pn)$

$\dfrac{dV}{dn}=0$ pour $n_{max} = \dfrac{\Omega c_0 t}{P}$ et $V_{max} = F_0\Omega^2$

n	0	$\frac{\Omega c_0 t}{P}$	∞
V_n	$\nearrow$	V_{max}	$\searrow 0$

(en réalité: n entier; discret)



V_{max} avance avec $v = \dfrac{dn_{max}}{dt} = \dfrac{\Omega c_0}{P} = \dfrac{shP}{P}c_0$

On peut chercher la largeur à mi-hauteur: $\dfrac{V_n}{V_{max}} = \dfrac{1}{2}$; correspond à

$ch[\Omega c_0 t - Pn] = \sqrt{2}$, $\Omega c_0 t - Pn = \pm 0{,}88$.

Or $\Omega c_0 t - Pn_{max} = 0$; donc $P(n-n_{max}) = \pm 0{,}88$; $\Delta n = \dfrac{2\times 0{,}88}{P} = \dfrac{1{,}8}{P}$

$v = \left(\dfrac{shP}{P}\right)c_0 > c_0 = v_{critique}$; rem: v indépendante de (Ωc_0) : il n'y a pas dispersion; il y a propagation sans déformation: soliton

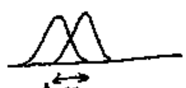
III.2.4: $c_0 = \sqrt{\dfrac{F_0}{L Q_0}} = 2{,}42.10^6$ cellule s^{-1} ; $\dfrac{shP}{P} = \dfrac{v}{c_0} = 1{,}03$

$= 2{,}42$ cellule μs^{-1}

P est donc faible; on utilise $\dfrac{shP}{P} \# 1 + \dfrac{P^2}{6}$; $P = \sqrt{6\times 0{,}03} = 0{,}45$; $\Delta n = 4$

$V_{max} = F_0\Omega^2 = F_0\, sh^2P = 0{,}9$ V

On a un soliton de hauteur 0,9 V, de largeur 4 cellules qui avance à la vitesse de 2,5 cellule μs^{-1} et met pour "traverser une cellule" le temps $\dfrac{1}{v} = 0{,}4\ \mu s$



critère de séparation

Compte-tenu de sa largeur, il "reste" / dure $4\times 0{,}4\ \mu s = 1{,}6\ \mu s$

Le débit est donc $\dfrac{1}{1{,}6\ 10^{-6}} = 6{,}25\ 10^5$ bits s^{-1} = 625 kbits s^{-1}