

X PC1 2007 : Mouvement collé-glissé, chant des verres

Corrigé proposé par Séverine Mensch (severine.mensch@wanadoo.fr) et Philippe Borel (philborel@numericable.fr). Merci de nous signaler toute erreur.

I Principe du mouvement « collé-glissé »

I.1. Théorème du centre d'inertie dans le référentiel galiléen du laboratoire en projection sur Oy

$$-m.g + \overline{R_{N^*}} + \overline{R_{N^*}} = \bullet$$

Théorème du moment cinétique en G dans R* référentiel barycentrique : $a_0 \overline{R_{N^*}} - (D_0 - a_0) \overline{R_{N^*}} = \bullet$

d'où $\overline{R_{N^*}} = \frac{(D_0 - a_0)}{D_0} . m.g$ et $\overline{R_{N^*}} = \frac{a_0}{D_0} . m.g$

I.2. Le TMC reste valable dans R* et l'absence de mouvement sur Oy conserve la première relation

donc les expressions précédentes restent valables avec D et a variables : $\overline{R_{N^*}} = \frac{(D(t) - a(t))}{D(t)} . m.g$ et

$$\overline{R_{N^*}} = \frac{a(t)}{D(t)} . m.g$$

I.3. Le support sur lequel la barre glisse en premier est celui sur lequel la barre appuie le moins, donc, avec $a_0 < D_0 - a_0$, c'est le support (2).

d'où $\overline{F_x} = \mu_c . \overline{R_{N^*}} = \mu_c . \frac{a(t)}{D(t)} . m.g$ avec tant que le support (1) ne glisse pas $a(t) = a_0$

Le TCI donne alors F_1 : G se déplace à $v_0/2$, donc $a_G = 0$ et $\overline{F_x} - \overline{F_y} = \bullet$ d'où

$$\overline{F_x} = \overline{F_y} = \mu_c . \overline{R_{N^*}} = \mu_c . \frac{a_0}{D_0 - v_0 . t} . m.g$$

I.4. La condition d'absence de glissement sur (1) est $\overline{F_x} < \mu_s . \overline{R_{N^*}}$, or F_1 diminue, donc à un instant t_1 le glissement en (1) est inévitable.

t_1 est donné par $\overline{F_x}(t) = \mu_s . \overline{R_{N^*}}(t)$ donc $\mu_c . \frac{a_0}{D(t_1)} . m.g = \mu_s . \frac{D(t_1) - a_0}{D(t_1)} . m.g$ d'où $t_1 = \frac{\mu_s . D_0 - (\mu_s + \mu_c) . a_0}{\mu_s . v_0}$ et

$$D(t_1) = a_0 \left(\frac{\mu_c + 1}{\mu_s} \right) = D_1$$

I.5. Au delà de t_1 les 2 supports glissent car aucune des conditions d'absence de glissement n'est réalisée.

La vitesse de glissement sur le support (1) est dirigée vers la gauche, celle du support (2) vers la

droite, donc $\overline{F_x} = \mu_c . \overline{R_{N^*}} = \frac{D(t) - a(t)}{D(t)} . \mu_c . m.g$ et $\overline{F_y} = \mu_c . \overline{R_{N^*}} = - \frac{a(t)}{D(t)} . \mu_c . m.g$ d'où

$$\overline{F_x} + \overline{F_y} = \frac{D(t) - \gamma . a(t)}{D(t)} . \mu_c . m.g$$

à $t = t_1$ $D(t_1) - \gamma . a(t_1) = a_0 \left(\frac{\mu_c + 1}{\mu_s} \right) - \gamma . a_0 = a_0 \left(\frac{\mu_c - \gamma}{\mu_s} \right) < \bullet$ car $\mu_c < \mu_s$ donc $\overline{F_x} + \overline{F_y} < \bullet$.

Le point G ralentit du fait du glissement des 2 supports, sa vitesse va passer de $v_0/2$ (support (1) bloqué) à $-v_0/2$ à l'instant t'_1 où le support (2) se bloquera, $\overline{F_x} + \overline{F_y}$ reste négatif durant toute cette phase (rq : l'expérience peut être facilement réalisée avec une règle en plexiglas supportée par 2 doigts...)

I.6. Lors de la phase suivante, c'est le support (2) qui est bloqué, le support (1) glisse. Cette phase

s'étudie donc comme au I4), les rôles de 1 et 2 sont inversés, et les CI deviennent $D(t_1)$ et $a(t_1)$ d'où

$$D(t_1) = \left[D(t_1) - a(t_1) \right] \left(\frac{\mu_c + 1}{\mu_s} \right)$$

I.7. Si on peut négliger la durée de la phase de glissement des 2 supports, on assimile $D(t_1)$ à

$$D(t_1) = a_0 \left(\frac{\mu_c + 1}{\mu_s} \right) \text{ et } a(t_1) = a(t_1) = a_0, \text{ donc } D(t_1) = \left[D(t_1) - a(t_1) \right] \left(\frac{\mu_c + 1}{\mu_s} \right) = \left[a_0 \left(\frac{\mu_c + 1}{\mu_s} \right) - a_0 \right] \left(\frac{\mu_c + 1}{\mu_s} \right) = \frac{\mu_c}{\mu_s} D(t_1).$$

On peut donc déterminer expérimentalement μ_c/μ_s en calculant les rapports successifs des longueurs entre les 2 supports lorsque le glissement change de côté. (rq : effectivement expérimentalement avec la règle on ne voit pas cette phase.)

II Analyse d'un mouvement d'oscillation

II.1. On cherche une position d'équilibre $/R_0$ lié au laboratoire : $\vec{v}_{Ro} = \vec{v}_{tapis} + \vec{v}_{tapis/Ro} = \vec{v}_{gl} + \vec{v}_o = \vec{v}$, le glissement se fait vers la gauche, la force de frottement est vers la droite.

A l'équilibre le TCI s'écrit $-kx + F = 0$ avec $F = \mu_c m g$ (équilibre sur y et condition de glissement) d'où

$$x_{eq} = \frac{\mu_c m g}{k} = \frac{\mu_c g}{\omega^2}$$

II.2. ♦ si $\dot{X} < v_o$ alors $v_{gl} < \vec{v}$ et $\vec{F} > \cdot$, le PFD dans R_0 s'écrit $m \ddot{x} = -kx + \mu_c m g$ d'où $\ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 x_{eq}$ (1)

♦ si $\dot{X} > v_o$ alors $v_{gl} > \vec{v}$ et $\vec{F} < \cdot$ l'équation du mouvement devient $m \ddot{x} = -kx - \mu_c m g$ d'où

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -\omega^2 x_{eq} \quad (2).$$

♦ S'il y a collage, $\dot{X} = v_o = cste$ donc $\ddot{X} = \cdot$, le TCI s'écrit $-kx + \vec{F} = \cdot$ à la condition que $F < \mu_s m g$

donc $k|x| < \mu_s m g$ d'où $|x + x_{eq}| < \frac{\mu_s}{\mu_c} x_{eq}$ donc $X \in [X_1, X_2]$ avec $X_2 = x_{eq} \left(-1 + \frac{\mu_s}{\mu_c} \right)$ et $X_1 = -x_{eq} \left(-1 + \frac{\mu_s}{\mu_c} \right)$

II.3. Si la masse est posée sans vitesse initiale $/R_0$, $v_{gl} < 0$, c'est l'équation (1) qui donne le mouvement. Avec les CI proposées, la solution est $X(t) = X_o \cos(\omega t)$

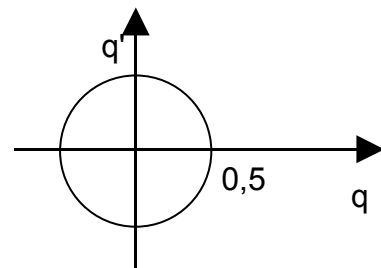
Pour rester dans ces conditions de glissement il faut $\forall t, \dot{X} < v_o$ donc $X_o \omega < v_o$ soit $X_o < v_o / \omega = X_m$

II.4. $q_{eq} = \omega \frac{x_{eq}}{v_o}$, $q_1 = -q_{eq}(\gamma + 1)$, $q_2 = q_{eq}(\gamma - 1)$

II.5. $q' = \frac{dq}{d\theta} = \frac{dq}{dt} \frac{dt}{d\theta} = \frac{\dot{X}}{X_m} \frac{1}{\omega} = \frac{\dot{X}}{v_o} q'$ et

$\ddot{X} = v_o q'' \omega = X_m \omega^2 q''$ donc l'équation (1) se simplifie sous la forme $q'' + q = 0$ (1'), valable si $q' < 1$

(2) devient $q'' + q = -2q_{eq}$ (2') avec $q' > 1$

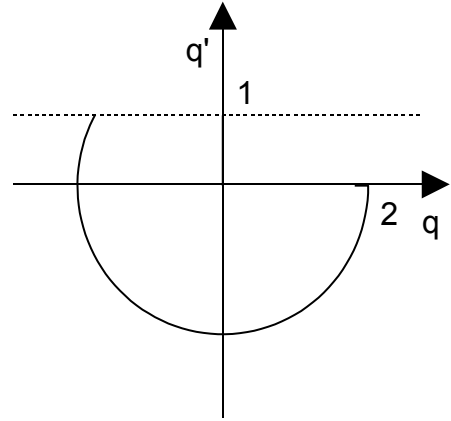


Avec les CI $q(0) = 0,5$ et $q'(0) = 0$, on est dans les conditions du II 2), les oscillations sont

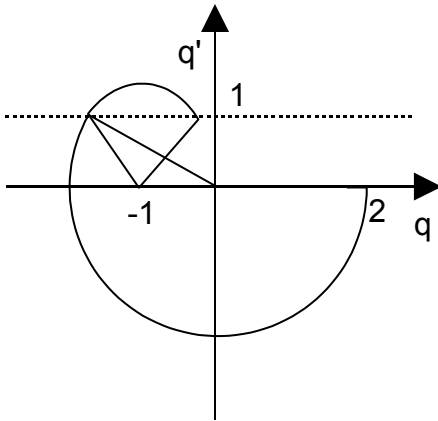
harmoniques, le diagramme de phase est un cercle :

II.6. Les points représentant les états de collage correspondent à $\dot{x} = v_0$ donc $\dot{X} = v_0$ et $q'=1$: ils sont situés sur le diagramme de phase sur l'axe $q'=1$, entre $q_1 = -3q_{eq} = -1,5$ et $q_2 = q_{eq} = 0,5$.

II.7. Avec les CI proposées, la première phase du mouvement correspond à $q' > 1$, c'est donc l'équation (1') qui donne le mouvement : la solution est valable tant que $q' < 1$. Cette phase conduit à un arc de cercle dans le diagramme de phase :

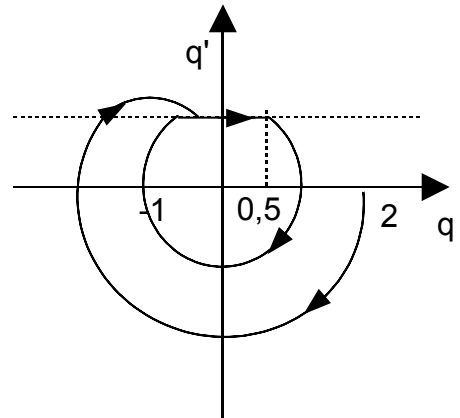


Il suit une phase d'oscillation vers la droite, l'équation du mouvement est (2'), le diagramme de phase est un arc de cercle centré sur l'axe q en $-2q_{eq} = -1$



Lors du deuxième passage par $q'=1$, le point est dans la zone de collage : il se colle et part donc sur la droite jusqu'à atteindre q_2 . Une fois en q_2 , on retrouve l'équation (1') : le diagramme de phase est à nouveau un arc de cercle de centre O, lorsque le point atteint $q'=1$ il est cette

fois dans la zone de collage, et suit la droite $q'=1$ jusqu'à q_2 : le mouvement devient périodique.



Le cycle ne dépend pas des conditions initiales, l'arc de cercle est centré en O, entre $(q_2, 1)$ et $(-q_2, 1)$, la phase de collage entre $(-q_2, 1)$ et $(q_2, 1)$.

II.8. Une fois que le régime périodique est établi, T_c se décompose en $T_c = t_1 + t_2$: t_1 durée de la phase de collage de $-q_2$ à q_2 et $t_2 =$ durée de la phase de glissement.

$$t_1 = \int_{-q_2}^{q_2} \frac{q_r \cdot X_m}{v_0} = \int_{-q_2}^{q_2} \frac{q_r}{\omega}$$

$$t_2 = \frac{\theta_0}{\omega} \text{ où } \theta_0 \text{ est l'angle d'ouverture de l'arc de cercle décrit dans le plan de phase, donc}$$

$$\theta_0 = \pi + \int \text{Arcos}(q_r) \text{ et } t_2 = \frac{\pi + \int \text{Arcos}(q_r)}{\omega}$$

Finalement
$$T_c = \frac{\pi + \int \text{Arcos}(q_r) + \int q_r}{\omega}$$

II.9. ♦ En l'absence de collage :

$$\vec{F} = \mu_c \cdot mg \quad \forall t \text{ donc } P = \vec{F} \cdot \vec{v}_{gl} = \mu_c \cdot mg \cdot (\dot{x} - v_0) \text{ et } W = \int \mu_c \cdot mg \cdot (\dot{x} - v_0) \cdot dt$$

Or sur une période T : $\int \dot{x} dt = \int dx = \dots$ donc $W = -\mu_c \cdot mg \cdot v_0 \cdot T = -\mu_c \cdot mg \cdot v_0 \cdot \frac{\pi}{\omega}$

◆ S'il y a collage :

$v_{gl} = 0$ pendant la phase de collage, donc P=0 et W=0

$\vec{F} = \mu_c \cdot m \cdot g$ pendant la phase de glissement (durée t_2), donc $P = \vec{F} \cdot \vec{v}_{gl} = \mu_c \cdot mg \cdot (\dot{x} - v_0)$ et

$W_c = \int \mu_c \cdot mg \cdot (\dot{x} - v_0) \cdot dt$ l'intégrale portant cette fois uniquement entre 0 et t_2 , où q passe de q_1 à

$-q_2$, donc $W_c = \mu_c \cdot mg \left[\int_{q_1 X_m}^{-q_2 X_m} dx - \int_0^{t_2} v_0 \cdot dt \right]$ soit

$$W_c = \mu_c \cdot mg \left[-q_2 X_m - v_0 t_2 \right] = -\mu_c \cdot mg \left[q_1 X_m + v_0 \frac{\pi + \text{Arccos}(q_1)}{\omega} \right]$$

et finalement $W_c = -\mu_c \cdot mg \cdot v_0 \cdot T_c$

Ainsi, dans les 2 cas, on trouve une puissance moyenne $P_{moy} = \frac{W}{T} = \frac{W_c}{T_c} = -\mu_c \cdot m \cdot g \cdot v_0$

Qu'il y ait ou non une phase de collage, la puissance moyenne par cycle est la même : en cas de collage, la puissance s'annule pendant le collage mais est plus importante pendant le glissement. On préfère un freinage sans collage pour que la puissance instantanée soit constante, ce qui évite des à-coups et des vibrations à la fréquence ω qui apparaissent dans le cas du collage.

III. Le chant du verre :

III.1. Analyse énergétique de la vibration

III.1.1. Pour $\theta = k \cdot \pi/2$ $\delta r = \delta_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$ les vibrations présentent un ventre et pour $\theta = \pi/4 + k \cdot \pi/2$ $\delta r = 0$ ce sont des nœuds de vibrations. Ces résultats sont conformes à la figure 3.

III.1.2. Pour un point au bord du verre, par exemple sur le ventre $\theta = 0$, la déformation est sinusoïdale $\delta(t) = \delta_0 \cdot \cos(\omega t)$. E est la somme d'un terme d'énergie cinétique $A \left(\frac{d\delta}{dt} \right)^2$ et d'un terme d'énergie potentielle élastique $B \cdot \delta^2$ de type parabolique conforme aux déformations sinusoïdales.

III.1.3. Sans amortissement l'énergie mécanique se conserve soit $dE/dt = 0$.

Après simplification $A \left(\frac{d^2\delta}{dt^2} \right) + B \cdot \delta = 0$, équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre

$$\omega = \sqrt{\frac{B}{A}}$$

III.2. Energie cinétique du tube cylindrique

III.2.1. $dm = \rho_v \cdot R \cdot d\theta \cdot H \cdot a$

$$v_r = \frac{d(R + \delta r)}{dt} = -\delta_0 \cdot \omega \cdot \cos(\gamma \cdot \theta) \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

III.2.3. On intègre la relation $\frac{ds(\vartheta, t)}{d\vartheta} + \delta_o \cdot \cos(\gamma \cdot \vartheta) \cdot \cos(\omega \cdot t) = \dots$ par rapport à θ ,

$s(\vartheta, t) = \frac{\delta_o}{\gamma} \cdot \sin(\gamma \cdot \vartheta) \cdot \cos(\omega \cdot t) + f(t)$, avec $f(t)=0$ la valeur moyenne temporelle de $s(\theta, t)$ étant nulle.

$$s(\vartheta, t) = \frac{\delta_o}{\gamma} \cdot \sin(\gamma \cdot \vartheta) \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad \text{et} \quad \frac{ds(\vartheta, t)}{dt} = -\frac{\delta_o}{\gamma} \cdot \omega \cdot \sin(\gamma \cdot \vartheta) \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

III.2.4. Les déformations sont supposées planes, $v_z=0$ $v^\gamma = v_r^\gamma + v_s^\gamma$

$$dE_c = \frac{1}{\gamma} \cdot dm \left(\left(\frac{d\delta r}{dt} \right)^\gamma + \left(\frac{ds}{dt} \right)^\gamma \right) = \frac{1}{\gamma} \cdot H \cdot R \cdot a \cdot \rho \cdot v \cdot \omega \cdot \delta_o \cdot \left(\cos^\gamma(\gamma \cdot \theta) + \frac{\sin^\gamma(\gamma \cdot \theta)}{\xi} \right) \cdot d\theta \cdot \sin^\gamma(\omega \cdot t)$$

Intégrons dE_c l'énergie cinétique élémentaire de l'élément de paroi dm entre 0 et 2π :

$$\int_0^{2\pi} \cos^\gamma(\gamma \cdot \theta) \cdot d\theta = \langle \cos^\gamma(\gamma \cdot \theta) \rangle \cdot \gamma \pi = \pi = \int_0^{2\pi} \sin^\gamma(\gamma \cdot \theta) \cdot d\theta$$

$$E_c = \frac{\pi}{\gamma} \cdot \rho \cdot v \cdot H \cdot R \cdot a \cdot \omega \cdot \delta_o \cdot \sin^\gamma(\omega \cdot t)$$

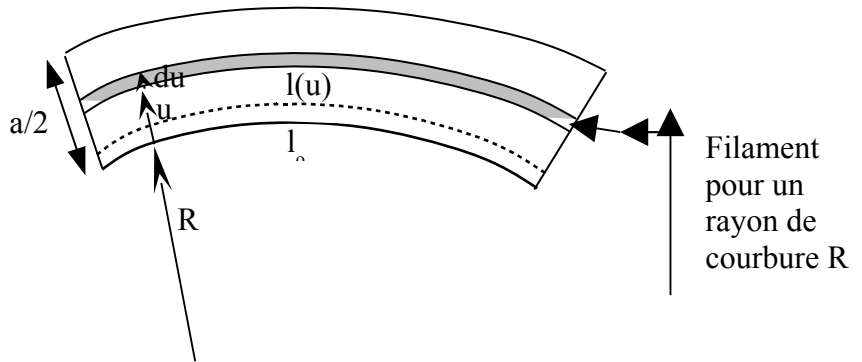
III.3. Analyse énergétique de la vibration. Energie potentielle élastique

III.3.1. En éliminant θ_o des deux relations $l_o = R \cdot \theta_o$ et $l = (R+u) \cdot \theta_o$, il

vient $l = l_o \left(1 + \frac{u}{R} \right)$

Quand le rayon de courbure passe de R à R' le filament subit un allongement de

$$\delta l = l(R') - l(R) = l_o \cdot u \cdot \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} \right)$$



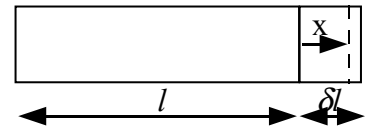
III.3.2. La loi de Hooke donne avec les notations suivantes $\frac{\delta F}{dS} = Y \cdot \frac{\delta l}{l}$ avec $dS = du \cdot \delta z$;

Comme $a \ll R$, $u \ll R$ donc $\frac{\delta l}{l} = \frac{\delta l}{l_o} \left(1 + \frac{u}{R} \right)^{-1} \approx \frac{\delta l}{l_o}$; $\delta F \approx Y \cdot \frac{\delta l}{l_o} \cdot du \cdot \delta z = Y \cdot u \cdot \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} \right) \cdot du \cdot \delta z$

III.3.3. Considérons le filament qui s'accroît de sa longueur l à $l + \delta l$, notons x une variable muette et considérons le travail d'un opérateur qui réalise cette opération.

$$\delta W_{op} = \int_0^{\delta l} \delta F \cdot dx \quad \text{avec} \quad \delta F = Y \cdot \frac{x}{l} \cdot du \cdot \delta z$$

$$\delta W_{op} = \frac{Y}{l} \left(\int_0^{\delta l} x \cdot dx \right) \cdot du \cdot \delta z$$



En définissant l'énergie potentielle par $dW_{ep} = \delta W_{op}$, $dW_{ep} = \frac{Y}{l} (\delta l)^\gamma \cdot du \cdot \delta z$

Avec $\delta l = l_o \cdot u \cdot \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} \right)$ et $l \approx l_o$, $dW_{ep} = \frac{Y}{\gamma} \cdot l_o \cdot \left(\frac{R-R'}{RR'} \right)^\gamma \cdot u^\gamma \cdot du \cdot \delta z$ pour le filament.

En supposant la déformation uniforme dans la paroi, on intègre u entre $-a/2$ et $a/2$
Pour obtenir l'énergie potentielle du filament d'épaisseur a , de hauteur δz .

$$dE_p = \frac{Y}{\gamma} \cdot l_o \cdot \left(\frac{R-R'}{RR'} \right)^\gamma \cdot \left(\int_{-a/2}^{a/2} u^\gamma \cdot du \right) \cdot \delta z = \frac{Y}{\gamma \xi} \cdot l_o \cdot \left(\frac{R-R'}{RR'} \right)^\gamma \cdot a^\gamma \cdot \delta z$$

En assimilant la déformation à la variation de rayon de courbure et la considérant faible on peut alors écrire $\left(\frac{R-R'}{RR'}\right) \approx \frac{-\delta r}{R}$ dans l'expression précédente.

III.3.4. On tient compte de la dépendance en θ de la déformation, pour le filament élémentaire de largeur angulaire $d\theta$, d'épaisseur du et de hauteur δz , l'énergie potentielle d^3E_p s'écrit en

$$\text{remplaçant } l_0 \text{ par } l_0 = R \cdot d\theta : d^3E_p = \frac{Y}{R} \left(\frac{R-R'}{RR'}\right) \cdot u \cdot du \cdot dz \cdot R \cdot d\theta$$

$$\text{avec } \frac{1}{R'} - \frac{1}{R} = -\frac{\delta r + \delta r''}{R} \text{ et } \delta r + \delta r'' = -\nu \cdot \delta_0 \cdot \cos(\nu \cdot \theta) \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$d^3E_p = \frac{\nu}{R} \cdot Y \cdot \delta_0 \cdot \cos(\nu \cdot \theta) \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot d\theta \cdot u \cdot du \cdot \delta z$$

Pour l'anneau de hauteur δz il faut intégrer u entre $-a/2$ et $a/2$ et θ entre 0 et 2π .

$$dE_p = \frac{\nu}{R} \cdot Y \cdot \delta_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \delta z \cdot \int_{-a/2}^{a/2} u \cdot du \cdot \int_0^{2\pi} \cos(\nu \cdot \theta) \cdot d\theta \text{ soit après calculs}$$

$$dE_p = \frac{\nu \cdot \pi}{\lambda \cdot R} \cdot Y \cdot a^2 \cdot \delta_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \delta z$$

III.4. Fréquence de vibration du tube

En tenant compte dans le modèle de la non indépendance des anneaux du cylindre, l'énergie potentielle s'écrit par intégration sur δz :

$$E_p = \frac{\nu \cdot \pi}{\lambda \cdot R} \cdot Y \cdot a^2 \cdot \delta_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$\text{Par identification avec le terme } B\delta^2, B = \frac{\nu \cdot \pi}{\lambda \cdot R} \cdot Y \cdot a^2$$

Par identification du terme d'énergie cinétique de la question III.2.4. avec le terme $A \left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2$,

$$A = \frac{\rho}{\lambda} \cdot \pi \cdot \rho_v \cdot H \cdot R \cdot a$$

$$\text{La fréquence du mode de vibration s'écrit : } f = \frac{1}{\nu \cdot \pi} \sqrt{\frac{B}{A}} = \frac{a}{\nu \cdot \pi \cdot R} \sqrt{\frac{\nu \cdot Y}{\rho_v \cdot (\lambda - \sigma \nu)}} \quad \text{A.N. } f=948 \text{ Hz}$$

Remarque en ordre de grandeur:

Supposons que le mode fondamental de vibration correspond à une onde qui décrit la circonférence du verre en une période, la fréquence est de l'ordre de $f \approx c / (2 \cdot \pi \cdot R)$ où c est sa vitesse

de propagation $c \approx \sqrt{\frac{Y}{\rho_v}}$, on obtient $f \approx \frac{1}{\nu \cdot \pi \cdot R} \sqrt{\frac{Y}{\rho_v}}$. Le calcul donne $f=25,6\text{kHz}$! L'ordre de

grandeur n'est pas bon. En effet le modèle simpliste précédent ne tient pas compte de l'épaisseur du verre ; le remplacement de $1/R$ par a/R^2 de même dimension permet de retrouver un ordre de

grandeur correct $f \approx \frac{a}{\nu \cdot \pi \cdot R} \sqrt{\frac{Y}{\rho_v}} = 1,1 \text{ kHz}$.