ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2009 **FILIÈRE PC**

PREMIÈRE COMPOSITION DE PHYSIQUE

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices **n'est pas** autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Stabilité de la matière, stellaire et interstellaire

Les nuages de gaz interstellaire que l'on trouve dans l'univers peuvent s'effondrer sous l'effet de leur propre champ gravitationnel et donner lieu à des structures denses, dont la stabilité même n'est pas nécessairement assurée. L'objet de ce problème est d'analyser certaines situations conduisant à ce phénomène.

On admettra qu'une distribution de masse caractérisée par une masse volumique $\rho(\vec{r})$ donne lieu à un champ gravitationnel $\vec{g}(\vec{r})$ dérivant d'un potentiel $\varphi(\vec{r})$ avec $\vec{g}(\vec{r}) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi$ et tel que $\mathrm{div}\,\vec{g} = -4\pi G\rho$.

Données numériques

Constante gravitationnelle :	G	$= 6,7\times 10^{-11}\ \mathrm{m^3\cdot kg^{-1}\cdot\ s^{-2}}$
Nombre d'Avogadro :	N_A	$= 6,02\times 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$
Vitesse de la lumière dans le vide :	c	$= 3,0\times 10^{8}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

I. Première approche

I.1 Si l'on cherche à déterminer le champ gravitationnel $\vec{g}(\vec{r})$ résultant d'une distribution de masse volumique $\rho(\vec{r})$, on peut s'appuyer sur une analogie électrostatique. Préciser, dans le cadre de cette analogie, les quantités qui jouent les rôles de $\vec{g}(\vec{r})$, de $\rho(\vec{r})$ et de G.

I.2 Soit une boule de rayon R centrée à l'origine des coordonnées, dont la distribution de masse est à symétrie sphérique. Soient $\rho(r)$ la masse volumique, $m(r)$ la masse de la boule de rayon r (pour $r < R$) et M la masse totale.

I.2.1 Déterminer, pour $r \geq R$, le champ gravitationnel $\vec{g}(\vec{r})$ produit par cette boule de matière.

I.2.2 Déterminer de même, pour $r < R$, le champ gravitationnel $\vec{g}(\vec{r})$ à l'aide de $m(r)$.

I.3 Soit une boule gazeuse de masse volumique ρ uniforme, de masse M et de rayon R_0, initialement au repos. Elle s'effondre sous l'effet de son propre champ gravitationnel. On suppose que ce mouvement garde à tout moment la symétrie sphérique ; on fait l'hypothèse qu'un élément quelconque du milieu gazeux, de masse μ, initialement à la distance r_0, a un mouvement de chute libre, c'est-à-dire qu'il n'est soumis qu'à la force de gravitation du gaz situé initialement à une distance du centre inférieure à r_0 et qui se contracte.

I.3.1 On rappelle la loi de Kepler reliant, dans le cas d'une trajectoire elliptique d'un corps attiré par une masse ponctuelle M_0, la période $\mathscr{C}$ au demi-grand axe a :

$$\mathscr{C} = 2\pi(a^3/GM_0)^{1/2} .$$

En déduire l'expression de la durée de chute τ_g jusqu'à l'origine en fonction de G et ρ. Cette durée dépend-elle de r_0 ?

I.3.2 Calculer τ_g pour $M = 2,0 \times 10^{30}$ kg et $R_0 = 7,0 \times 10^8$ m (valeurs correspondant au Soleil).

Même calcul pour un nuage intergalactique sphérique, de rayon 10^8 fois celui du Soleil et possédant dix atomes d'hydrogène par cm^3.

I.3.3 Quelle force antagoniste, non prise en compte, peut freiner un tel effondrement et éventuellement l'arrêter ?

I.4 On suppose que le gaz de la boule précédente possède une température moyenne T non nulle. Ce gaz est supposé parfait, monoatomique et de masse molaire M_A.

I.4.1 Donner l'expression de l'énergie cinétique totale U_{cin} du gaz en fonction de T, M, M_A et de la constante des gaz parfaits R_{GP}.

I.4.2 L'énergie potentielle de gravitation E_g de la boule est donnée par :

$$E_g = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R_0} .$$

Si $E_g + 2U_{\text{cin}} < 0$, on montre qu'un effondrement s'amorce. Déterminer le rayon critique R_c tel que, à ρ fixé et pour $R_0 > R_c$, ce phénomène se produit. Exprimer R_c en fonction de ρ, T, et des constantes G, M_A et R_{GP}.

I.4.3 Soit c_S la vitesse des ondes acoustiques dans le gaz et $\tau_S = R_0/c_S$ une estimation du temps mis par une perturbation acoustique pour aller de la surface au centre. Expliciter c_S en fonction de T, M_A et R_{GP} et exprimer τ_S.

Montrer que τ_S est supérieur à τ_g pour $R_0 > R_S$ où R_S est une distance que l'on explicitera en fonction de ρ, T, et des constantes G, M_A et R_{GP}. Quelle interprétation dynamique vous suggère la comparaison de R_S et R_c ?

II. Stabilité d'une étoile

On s'intéresse dans cette partie aux propriétés d'une étoile dense, comme le Soleil, que l'on décrira comme une boule de gaz parfait à symétrie sphérique de masse totale M. On reprend les notations de la partie **I** : $\rho(r)$, $m(r)$, $\vec{g}(\vec{r})$ et on en utilisera les résultats.

II.1 On suppose la distribution à l'équilibre.

II.1.1 Exprimer, à l'aide de $m(r)$ et $\rho(r)$, la force de gravitation par unité de volume à la distance r du centre.

II.1.2 Dans le fluide règne une pression locale $P(r)$ avec $P(R) = 0$ à la surface. Exprimer la condition d'équilibre ; en déduire $\dfrac{dP}{dr}$.

II.2 On s'intéresse à l'aspect énergétique. Soit E_g l'énergie potentielle de gravitation de toute la boule et dE_g la contribution à cette énergie de la couche sphérique de masse $dm(r)$ située entre r et $r + dr$.

II.2.1 Exprimer dE_g à l'aide de $m(r)$ et de $dm(r)$.

II.2.2 Montrer que dE_g s'écrit $dE_g = \dfrac{dP}{dr} 4\pi r^3 dr$.

II.2.3 Montrer que $E_g = -3 \displaystyle\int_0^R P dV$ où $dV = 4\pi r^2 dr$ est le volume de la couche sphérique comprise entre r et $r + dr$.

II.3 Rappeler l'expression de l'énergie interne molaire U_{mol} d'un gaz parfait en fonction de la capacité thermique molaire C_V et de la température thermodynamique T. Soit $\gamma = C_P/C_V$. Exprimer U_{mol} en fonction de γ, de T et de la constante des gaz parfaits R_{GP}.

II.4 Déduire de cette expression et de la précédente une relation entre E_g et l'énergie interne totale U du gaz. On supposera que γ est uniforme.

II.5 Exprimer l'énergie totale E de la boule en fonction de U. Déterminer à quelle condition portant sur γ l'étoile est stable.

II.6 Que devient la relation entre E_g et U obtenue en **II.4** pour $\gamma = 5/3$. À quel type de gaz correspond cette valeur ? À quelle forme d'énergie correspond alors U ?

II.7 Si la température T croît, écartant un peu le système de l'équilibre, les réactions nucléaires s'accroissent et fournissent plus d'énergie. En utilisant **II.5**, comment interprétez-vous le retour à l'équilibre, donc la stabilité, du Soleil ?

III. Évolution d'une perturbation

On suppose que l'univers est constitué de matière que l'on traitera comme un fluide non visqueux, caractérisé par un champ de masse volumique $\rho(\vec{r},t)$, un champ de vitesse $\vec{v}(\vec{r},t)$ et un champ de pression $P(\vec{r},t)$. On appellera $\vec{g}(\vec{r},t)$ le champ gravitationnel local.

On suppose qu'en plus de la pression et de la gravitation, il existe une autre force extérieure de densité volumique $\vec{f}_V(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t)\vec{\Gamma}(\vec{r},t)$ caractérisée ici par le champ vectoriel $\vec{\Gamma}(\vec{r},t)$.

III.1 Écrire l'équation locale traduisant la conservation de la masse.

III.2 Écrire l'équation d'Euler traduisant localement le principe fondamental de la dynamique.

III.3 Écrire l'équation locale reliant $\vec{g}$ et ρ.

III.4 On suppose que le milieu est suffisamment dilué pour négliger la pression : $P_0 = P(\vec{r},t) \equiv 0$. On considère à un instant t_0 une région de masse volumique uniforme ρ_0 et au repos : $\vec{v}(\vec{r},t_0) = \vec{0}$; on note $\vec{g}_0(\vec{r})$ le champ gravitationnel dans cette région, et on suppose $\vec{\Gamma}(\vec{r},t) = -\vec{g}_0$.

III.4.1 Montrer que $\rho = \rho_0$ et $\vec{v} = \vec{0}$ est solution des équations précédentes pour $t > t_0$ (solution statique).

III.4.2 À un instant donné, cette région est soumise à une perturbation ; son état est alors caractérisé par le champ de vitesse $\vec{v}_1 = \vec{v}(\vec{r},t)$, la masse volumique $\rho = \rho_0 + \rho_1$ et le champ $\vec{g} = \vec{g}_0 + \vec{g}_1$; on suppose toujours $P = 0$ et $\vec{\Gamma} = -\vec{g}_0$.

Exprimer les trois équations qui relient $\vec{v}_1, \rho_1$ et $\vec{g}_1$. Les linéariser par rapport à ces trois variables. En déduire l'équation satisfaite par ρ_1.

Qu'en concluez-vous sur l'évolution de la perturbation ? Préciser le temps caractéristique d'évolution.

III.5 La croissance d'une perturbation crée progressivement une surpression P_1.

III.5.1 Écrire l'équation d'Euler en tenant compte de cette pression et la linéariser.

III.5.2 La pression et la masse volumique du fluide sont liées par l'équation d'état $P(\rho)$. Montrer que ρ_1 est solution de l'équation : $\dfrac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} = c_S^2 \Delta\rho_1 + 4\pi G\rho_0\rho_1$ où on exprimera c_S en fonction de $\dfrac{dP}{d\rho}$.

III.5.3 On cherche alors des solutions de l'équation précédente sous la forme $P_1(\vec{r},t) = A \exp i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$. Exprimer la relation de dispersion $\omega(k)$ donnant ω en fonction de k.

III.5.4 Montrer qu'il existe un nombre d'onde critique k_J tel que, pour $k < k_J$, les perturbations sont exponentiellement amplifiées. Exprimer la longueur caractéristique associée $\lambda_J = 2\pi/k_J$ en fonction de G, ρ_0 et c_S.

Comparer cette longueur aux rayons R_c et R_S déterminés en **I.4.2** et **I.4.3**.

III.5.5 On désigne par *masse de Jeans* et on note M_J la masse de la boule de rayon $\lambda_J/2$. En donner l'expression. Traduire la stabilité du fluide par une condition sur sa masse totale M et sur M_J.

IV. Univers en expansion et stabilité

L'Univers est en expansion uniforme. Une origine étant choisie (arbitraire, l'espace étant homogène et isotrope) et un repère $\mathcal{R}$ d'observation déterminé, soit $\vec{s}$ le vecteur position d'un point matériel de l'espace à l'instant de référence t_R. À un instant t, ce point matériel se trouve en $\vec{r}(t) = a(t)\vec{s}$ où $a(t)$ est un facteur d'échelle universel, avec $a(t_R) = 1$. Il est donc en mouvement dans $\mathcal{R}$ avec la vitesse $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dot{a}\vec{s} = \dfrac{\dot{a}}{a}\vec{r}$.

Dans cette partie, on suppose $\vec{\Gamma}(\vec{r}, t) \equiv \vec{0}$.

IV.1 On considère deux points matériels A et B repérés respectivement par $\vec{r}_A$ et $\vec{r}_B$. Expliciter leur vitesse relative $\vec{v}_A - \vec{v}_B$. En déduire que tout point, par exemple B, peut être choisi comme « centre » de l'expansion.

IV.2 La matière constituant l'univers est, comme en **III.4**, considérée comme un fluide non visqueux de masse volumique uniforme $\rho_0(t)$, de pression $P_0 = 0$ mais animé dans $\mathcal{R}$ d'une vitesse locale $\vec{v}_0(\vec{r}, t) = \dfrac{\dot{a}}{a}\,\vec{r}$.

IV.2.1 L'équation obtenue en **III.1** est satisfaite par la solution $\rho_0(t) = a^{-3}(t)\tilde{\rho}_0$ où on a posé $\tilde{\rho}_0 = \rho_0(t_R)$. Montrer que l'intégrale de $\rho_0(t)$ sur une boule de rayon $r(t)$ est une constante au cours du temps. Quelle propriété physique ce résultat traduit-il ?

IV.2.2 Montrer que l'équation obtenue en **III.2** est satisfaite par $\vec{g}_0(\vec{r}, t) = -\dfrac{4\pi G\rho_0(t)}{3}\,\vec{r}$ à condition que $\ddot{a}a^2$ soit une constante que l'on précisera.

IV.2.3 Une solution $a(t)$, correspondant à un modèle cosmologique particulier, est telle que $a(t = 0) = 0$. Déterminer cette solution en cherchant pour $a(t)$ une dépendance temporelle de la forme t^α.

IV.2.4 Exprimer $H(t) \equiv \dot{a}/a$ en fonction de t.

On pose $H_R = H(t_R)$. Exprimer t_R en fonction de H_R.

Pourquoi appelle-t-on t_R « âge de l'univers » ? Calculer l'âge que donne ce modèle avec la valeur de H_R que permet d'obtenir l'expérience : $H_R = 71\ \mathrm{km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}}$. Le *parsec* (symbole « pc ») est une unité de longueur couramment utilisée en astronomie et adaptée aux grandes échelles de distance : 1 pc $= 3,262$ année-lumière ; son multiple Mpc est le mégaparsec.

IV.3. On cherche à déterminer l'évolution temporelle d'une perturbation, l'état de base étant celui étudié en question **IV.2** et caractérisé par $\{\rho_0(t),\ \vec{v}_0(\vec{r},t),\ g_0(\vec{r},t),\ P_0 = 0\}$. On pose :

$$\rho = \rho_0 + \rho_1(\vec{r},t), \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1(\vec{r},t), \quad \vec{g} = \vec{g}_0 + \vec{g}_1(\vec{r},t), \quad P = P_0 = 0$$

et on ne retiendra dans les équations que les termes linéaires en $\rho_1, \vec{v}_1$ et $\vec{g}_1$.

IV.3.1 En utilisant l'opérateur de dérivation à l'ordre zéro : $\dfrac{d}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla})$, montrer que l'équation de conservation de la masse (cf.**III.1**) conduit à :

$$\frac{d\rho_1}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_1 + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v}_1 = 0 \ .$$

On pose $\delta = \dfrac{\rho_1(\vec{r},t)}{\rho_0(t)}$ et $\dot{\delta} = \dfrac{d\delta}{dt}$. Montrer que $\dot{\delta} + \operatorname{div} \vec{v}_1 = 0$.

IV.3.2 Montrer de même que l'équation d'Euler (cf. **III.2**) conduit à l'équation :

$$\frac{d\vec{v}_1}{dt} + \frac{\dot{a}}{a}\vec{v}_1 = \vec{g}_1 \ .$$

IV.3.3 Écrire l'expression reliant $\vec{g}_1$ et ρ_1. Cette relation forme avec les deux équations obtenues aux questions précédentes un système fermé. En éliminant $\vec{g}_1$ et $\vec{v}_1$, montrer que δ satisfait l'équation différentielle :

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} - 4\pi G\rho_0\delta = 0 \ .$$

Indication. On utilisera le fait que $\vec{r}$ évoluant proportionnellement à $a(t)$, on a pour tout champ de vecteur $V(\vec{r},t)$:

$$\frac{d}{dt}\operatorname{div}\vec{V} = -\frac{\dot{a}}{a}\operatorname{div}\vec{V} + \operatorname{div}\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right) .$$

IV.3.4 En utilisant l'expression de $\rho_0(t)$ et celle de $a(t)$ obtenue en **IV.2.3** expliciter l'équation différentielle de δ. L'équation admet des solutions de la forme t^β ; en donner la solution générale.

Qu'en concluez-vous sur l'évolution temporelle d'une perturbation ? La comparer à celle obtenue en **III.5.4**.

* *
*